НСМВИТ-2020
29 ИЮНЯ - 1 ИЮЛЯ 2020 Г., Г. СМОЛЕНСК

Архитектура математических моделей инвестиционного портфеля в условиях гибридной неопределенности

Авторы:

- А.В. Язенин (*Yazenin.AV@tversu.ru*)
  Тверской государственный университет, г. Тверь
- И.С. Солдатенко (soldis@tversu.ru)
  Тверской государственный университет, г. Тверь

Докладчик:

Александр Васильевич Язенин

СМОЛЕНСКИЙ ФИЛИАЛ МЭИ

Архитектура математических моделей инвестиционного портфеля в условиях гибридной неопределенности

Необходимые понятия и обозначения

В контексте работ [Nahmias, 1979; Язенин, 2016; Feng et al., 2001; Dubois et al., 1988; Nguyen et al., 1997; Mesiar, 1997; Hong, 2001] введем ряд определений и понятий из теории возможностей.

Пусть (Г, P(Г), τ) и (Ω, B, **P**) есть возможностное и вероятностное пространства, соответственно, в которых Ω – пространство элементарных событий $\omega \in \Omega$, Г – модельное пространство с элементами $\gamma \in Г$, B – σ-алгебра событий, P(Г) – множество всех подмножеств Г, $\tau \in \{\pi, \nu\}$, π и ν – меры возможности и необходимости, соответственно, а **P** – мера вероятности; $\mathbb{E}^1$ – числовая прямая.

Дадим определение нечеткой случайной (возможностно-вероятностной) величины и ее распределения [Язенин, 2016; Yazenin et al., 1996].

Определение 1. *Нечеткая случайная величина* $Y(\omega, \gamma)$ *есть вещественная функция* $Y: \Omega \times \Gamma \to \mathbb{E}^1$ *σ-измеримая для каждого фиксированного* γ*, а функция*

$$\mu_Y(\omega, t) = \pi\{\gamma \in \Gamma: Y(\omega, \gamma) = t\}, \forall t \in \mathbb{E}^1$$

называется ее функцией распределения.

Из определения 1 следует, что функция распределения нечеткой случайной величины зависит от случайного параметра – является случайной функцией.

Архитектура математических моделей инвестиционного портфеля в условиях гибридной неопределенности

Определение 2. *Пусть Y(ω, γ) – нечеткая случайная величина. Её ожидаемым значением* **E**[*Y*] *называется нечеткая величина, имеющая функцию распределения возможностей*

$$\mu_{\mathbf{E}[Y]}(t) = \pi\{\gamma \in \Gamma : \mathbf{E}[Y(\omega,\gamma)] = t\}, \forall t \in E^1,$$

где **E** *— оператор взятия математического ожидания*

$$\mathbf{E}[Y(\omega,\gamma)] = \int_{\Omega} Y(\omega,\gamma)\mathbf{P}(d\omega).$$

Функция распределения ожидаемого значения нечеткой случайной величины уже не зависит от случайного параметра и является нечеткой величиной.

Архитектура математических моделей инвестиционного портфеля в условиях гибридной неопределенности

Пусть X и Y – нечеткие случайные величины. Определим, следуя [Feng et al., 2001], моменты второго порядка.

Определение 3. *Ковариация нечетких случайных величин X и Y определяется следующим образом:*

$$cov(X,Y)=\frac{1}{2}\int_0^1\left(cov\left(X_\omega^-(\alpha),Y_\omega^-(\alpha)\right)+\ cov\left(X_\omega^+(\alpha),Y_\omega^+(\alpha)\right)\right)d\alpha,$$

где $X_\omega^-(\alpha), Y_\omega^-(\alpha), X_\omega^+(\alpha), Y_\omega^+(\alpha)$ *– суть границы* α*-уровневых множеств нечетких величин* X_ω, Y_ω*, соответственно.*

Определение 4. *Дисперсия нечеткой случайной величины Y есть*

$$\mathbf{D}[Y]=cov(Y,Y). \tag{1}$$

Определяемые в соответствии с рассматриваемым подходом математическое ожидание, дисперсия и ковариация нечетких случайных величин наследуют основные свойства аналогичных характеристик вещественных случайных величин.

Архитектура математических моделей инвестиционного портфеля в условиях гибридной неопределенности

Для моделирования нечетких величин часто используется распределение LR-типа [Dubois et al., 1988], которое для нечеткой величины $Y(\gamma)$ записывается, как правило, в виде $\mu_Y(t) = \left[\underline{m}, \overline{m}, \underline{d}, \overline{d}\right]_{LR}$. Здесь $\underline{m}, \overline{m}$ есть левая и правая границы интервала толерантности, $\underline{d}, \overline{d}$ – коэффициенты нечеткости, а $L(t)$ и $R(t)$ – функции представления левой и правой форм нечеткости возможностного распределения.

Для агрегирования нечеткой информации будем использовать t-нормы, которые обобщают операцию типа «min», заложенную в действиях над нечеткими множествами и нечеткими величинами [Nguyen et al., 1997]. Особый интерес представляют t-нормы

$$T_M(x,y) = \min\{x,y\} \text{ и } T_W(x,y) = \begin{cases} \min\{x,y\}, \text{если} \max\{x,y\} = 1, \\ 0, \text{иначе}, \end{cases}$$

которые являются экстремальными. T_M называется сильнейшей, а T_W — слабейшей t-нормой, так как для любой произвольной t-нормы T и $\forall x, y \in [0,1]$ справедливо неравенство:

$$T_W(x,y) \le T(x,y) \le T_M(x,y).$$

Математические модели портфеля минимального риска в условиях гибридной неопределенности. *Доходность портфеля в условиях гибридной неопределенности возможностно-вероятностного типа*

В условиях гибридной неопределенности возможностно-вероятностного типа доходность инвестиционного портфеля может быть представлена нечеткой случайной функцией

$$R_p(w, \omega, \gamma) = \sum_{i=1}^{n} R_i(\omega, \gamma) w_i \, , \qquad (2)$$

которая является линейной функцией долей капитала $w = (w_1, \ldots, w_n)$ в портфеле. Здесь $R_i(\omega, \gamma)$ – нечеткие случайные величины, моделирующие доходности отдельных финансовых активов, имеющие сдвиг-масштабное представление [Язенин, 2016]:

$$R_i(\omega, \gamma) = a_i(\omega) + \sigma_i(\omega) Z_i(\gamma). \qquad (3)$$

Всюду далее мы предполагаем, что в представлении (3) нечеткие величины $Z_i(\gamma) = \left[\underline{m}_i, \overline{m}_i, \underline{d}_i, \overline{d}_i\right]_{LR}$ взаимно *T*-связаны, где $T \in \{T_M, T_W\}$, а $a_i(\omega), \sigma_i(\omega)$ есть коэффициенты сдвига и масштаба – случайные величины, определенные в вероятностном пространстве (Ω, B, **P**), причем $\sigma_i(\omega) \geq 0$.

Архитектура математических моделей инвестиционного портфеля в условиях гибридной неопределенности

Тогда возможностное распределение доходности портфеля (2) принимает вид

$$R_p^T(w,\omega,\gamma) = \left[\underline{m}_{R_p}(w,\omega), \overline{m}_{R_p}(w,\omega), \underline{d}_{R_p^T}(w,\omega), \overline{d}_{R_p^T}(w,\omega)\right]_{LR} \qquad (4)$$

где $\underline{m}_{R_p}(w,\omega) = \sum_{i=1}^{n}\left(a_i(\omega) + \sigma_i(\omega)\underline{m}_i\right)w_i$, $\overline{m}_{R_p}(w,\omega) = \sum_{i=1}^{n}\left(a_i(\omega) + \sigma_i(\omega)\overline{m}_i\right)w_i$,

а коэффициенты нечеткости принимают вид в зависимости от вида T:

$$\underline{d}_{R_p^M}(w,\omega) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(\omega)\underline{d}_i w_i, \qquad \overline{d}_{R_p^M}(w,\omega) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(\omega)\overline{d}_i w_i,$$

когда $T = T_M$, и

$$\underline{d}_{R_p^W}(w,\omega) = \max_{i=1\ldots n}\left\{\sigma_i(\omega)\underline{d}_i w_i\right\}, \qquad \overline{d}_{R_p^W}(w,\omega) = \max_{i=1\ldots n}\left\{\sigma_i(\omega)\overline{d}_i w_i\right\},$$

в случае $T = T_W$.

Всюду далее будем обозначать $R_p^T(w,\omega,\gamma)$ как $R_p^M(w,\omega,\gamma)$ при $T = T_M$ и $R_p^W(w,\omega,\gamma)$ при $T = T_W$.

Архитектура математических моделей инвестиционного портфеля в условиях гибридной неопределенности

Для снятия неопределенности вероятностного типа в соответствии с развиваемым нами подходом [Yazenin, 2007] необходимо идентифицировать возможностное распределение математического ожидания функции $R_p^T(w,\omega,\gamma)$, то есть вычислить его параметры. Ожидаемая доходность портфеля в моделях портфельного анализа является при фиксированном w нечеткой величиной. Об этом говорят результаты следующих теорем.

Теорема 1. *Пусть* $T = T_M$. *Тогда ожидаемая доходность портфеля* $\hat{R}_p^M(w,\gamma)$ *характеризуется возможностным распределением*

$$\hat{R}_p^M(w,\gamma) = \mathbf{E}\left[R_p^M(w,\omega,\gamma)\right] = \left[\underline{m}_{\hat{R}_p}(w), \overline{m}_{\hat{R}_p}(w), \underline{d}_{\hat{R}_p^M}(w), \overline{d}_{\hat{R}_p^M}(w)\right]_{LR}, \text{ где}$$

$$\underline{m}_{\hat{R}_p}(w) = \sum_{i=1}^{n}(\hat{a}_i + \hat{\sigma}_i \underline{m}_i) w_i, \qquad \overline{m}_{\hat{R}_p}(w) = \sum_{i=1}^{n}(\hat{a}_i + \hat{\sigma}_i \overline{m}_i) w_i,$$

$$\underline{d}_{\hat{R}_p^M}(w) = \sum_{i=1}^{n} \hat{\sigma}_i \underline{d}_i w_i, \overline{d}_{\hat{R}_p^M}(w) = \sum_{i=1}^{n} \hat{\sigma}_i \overline{d}_i w_i, \hat{a}_i = \mathbf{E}[a_i(\omega)], \hat{\sigma}_i = \mathbf{E}[\sigma_i(\omega)].$$

Архитектура математических моделей инвестиционного портфеля в условиях гибридной неопределенности

Теорема 2. *Пусть $T = T_W$. Тогда ожидаемая доходность портфеля $\hat{R}_p^M(w,\gamma)$ характеризуется возможностным распределением*

$$\hat{R}_p^W(w,\gamma) = \mathbf{E}\left[R_p^W(w,\omega,\gamma)\right] = \left[\underline{m}_{\hat{R}_p}(w), \overline{m}_{\hat{R}_p}(w), \underline{d}_{\hat{R}_p^W}(w), \overline{d}_{\hat{R}_p^W}(w)\right]_{LR},$$

где

$$\underline{d}_{\hat{R}_p^W}(w) = \mathbf{E}\left[\max_{i=1\dots n}\{\sigma_i(\omega)\underline{d}_i w_i\}\right], \overline{d}_{\hat{R}_p^W}(w) = \mathbf{E}\left[\max_{i=1\dots n}\{\sigma_i(\omega)\overline{d}_i w_i\}\right].$$

Замечание 1. Функции $\underline{d}_{\hat{R}_p^W}(w)$ и $\overline{d}_{\hat{R}_p^W}(w)$ могут быть вычислены в явном виде только для простых вероятностных распределений случайных составляющих $a_i(\omega), \sigma_i(\omega)$ [Язенин, 2016] и это связано с большим объемом вычислений. Чтобы уменьшить объем вычислений, для решения экстремальных задач с функциями такого типа можно воспользоваться методами стохастического программирования, в частности методом стохастического квазиградиента [Егорова и др., 2017; Ермольев, 1976].

Архитектура математических моделей инвестиционного портфеля в условиях гибридной неопределенности

Модели допустимых портфелей в условиях гибридной неопределенности возможностно-вероятностного типа

В соответствии с классическим подходом Марковица [Markowitz, 1952] в модели портфеля минимального риска нам необходимо построить функцию риска портфеля. Ожидаемую доходность или доходность портфеля можно внести в систему ограничений. Для снятия неопределенности возможностного типа в систему ограничений можно ввести ограничение по мере возможности/необходимости на приемлемый для инвестора уровень ожидаемой доходности:

$$F_p^{\tau\mathbf{E}}(w) = \begin{cases} \tau\{\hat{R}_p^T(w,\gamma)\ \mathcal{R}\ m_d\} \geq \alpha, \\ \sum_{i=1}^{n} w_i = 1, \\ w \in \mathbb{E}_+^n, \end{cases}$$

где $\mathbb{E}_+^n = \{x \in \mathbb{E}^n : x \geq 0\}$, $\hat{R}_p^T(w,\gamma)$ — ожидаемая доходность, $\mathcal{R}$ – четкое отношение {≥, =}; α ∈ (0, 1], m_d – уровень доходности, приемлемый для инвестора, $T \in \{T_M, T_W\}$.

Архитектура математических моделей инвестиционного портфеля в условиях гибридной неопределенности

Следующие теоремы позволяют построить эквивалентные детерминированные аналоги моделей допустимых портфелей.

Теорема 3. *Пусть в модели ограничений* $F_p^{\tau\mathbf{E}}$ $\tau = '\pi'$, $\mathcal{R}$ = '$\geq$'. *Тогда эквивалентная детерминированная модель допустимых портфелей имеет вид*:

$$F_p^{\pi\mathbf{E}}(w) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} (\hat{a}_i + \hat{\sigma}_i \overline{m}_i) w_i + \overline{d}_{\hat{R}_p^T}(w) * R^{-1}(\alpha) \geq m_d, \\ \sum_{i=1}^{n} w_i = 1, \\ w \in \mathbb{E}_+^n. \end{cases}$$

Архитектура математических моделей инвестиционного портфеля в условиях гибридной неопределенности

Теорема 4. *Пусть в модели допустимых портфелей* $F_p^{\tau\mathbf{E}}$ τ*= ‘ν’,* $\mathcal{R}$ *= '≥'. Тогда эквивалентная детерминированная модель допустимых портфелей принимает вид*:

$$F_p^{\nu\mathbf{E}}(w) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} (\hat{a}_i + \hat{\sigma}_i \underline{m}_i) w_i - \underline{d}_{\hat{R}_p^T}(w) * L^{-1}(1-\alpha) \geq m_d, \\ \sum_{i=1}^{n} w_i = 1, \\ w \in \mathbb{E}_+^n. \end{cases}$$

Из теорем 3, 4 получаем

Следствие 1. $F_p^{\nu\mathbf{E}}(w) \subseteq F_p^{\pi\mathbf{E}}(w)$

Архитектура математических моделей инвестиционного портфеля в условиях гибридной неопределенности

В том случае, когда доходность, определяемая (2), вносится в систему ограничений, гибридную неопределенность можно снять путем наложения ограничения по возможности/необходимости и вероятности на приемлемый уровень доходности. Формально, математическая модель такого ограничения может быть записана в виде:

$$F_p^{\tau\mathbf{P}}(\mathcal{w}) = \begin{cases} \tau\left\{\mathbf{P}\left\{R_p(\mathcal{w},\omega,\gamma)\ \mathcal{R}\ m_d\right\} \geq p_0\right\} \geq \alpha_0, \\ \sum_{i=1}^{n} \mathcal{w}_i = 1, \\ \mathcal{w} \in \mathbb{E}_+^n, \end{cases}$$

где $\mathbf{P}$ – вероятностная мера, $p_0 \in (0,1]$ – уровень вероятности.

Архитектура математических моделей инвестиционного портфеля в условиях гибридной неопределенности

Для дальнейшего нам потребуются следующие обозначения и понятия. Обозначим через $t = (t_1, \dots, t_n)$ – вектор, компонентами которого являются возможные значения нечетких величин $Z_1(\gamma), \dots, Z_n(\gamma)$, соответственно. При сильнейшей t-норме с возможностью $\mu_{Z_i}(t_i)$ доходность i-го финансового актива есть случайная величина $Z_i^{t_i}(w) = a_i(\omega) + \sigma_i(\omega)t_i$, а доходность портфеля с возможностью $\mu_p(t) = \min\limits_{1 \le i \le n}\{\mu_{Z_i}(t_i)\}$ есть $R_p^t(w, \omega) = \sum_{i=1}^n (a_i(\omega) + \sigma_i(\omega)t_i)w_i$.

Тогда с возможностью $\mu_p(t)$, ожидаемая доходность и риск портфеля определяются по формулам

$$m_{R_p}(w, t) = \mathbf{E}\left[R_p^t(w, \omega)\right] = \sum_{i=1}^{n} (\hat{a}_i + \hat{\sigma}_i t_i) w_i$$

и

$$d_{R_p}(w, t) = \mathbf{E}\left[\left(R_p^t(w, \omega) - m_{R_p}(w, t)\right)^2\right],$$ соответственно.

Архитектура математических моделей инвестиционного портфеля в условиях гибридной неопределенности

Проводя стандартные преобразования (см., например, [Язенин, 2016]), мы получаем с возможностью $\mu_p(t)$ следующую формулу для дисперсии:

$d_{R_p}(w,t) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}(t_i,t_j)w_i w_j$, в которой

$$c_{ij}(t_i,t_j) = C_{a_i a_j} + C_{a_j \sigma_i} t_j + C_{\sigma_j a_i} t_i + C_{\sigma_i \sigma_j} t_i t_j,$$

$$C_{a_i a_j} = cov\left(a_i,a_j\right), C_{a_j \sigma_i} = cov\left(a_j,\sigma_i\right), C_{\sigma_j a_i} = cov\left(\sigma_j,a_i\right), C_{\sigma_i \sigma_j} = cov\left(\sigma_i,\sigma_j\right).$$

Функция $d_{R_p}(w,t)$ обладает свойствами, которые обусловлены свойствами ковариационной матрицы **C** с элементами $c_{ij}(t_i,t_j)$:

- $d_{R_p}(w,t)$ есть выпуклая функция по w при фиксированном t;
- для любых векторов w и t функция $d_{R_p}(w,t)$ неотрицательна;
- $d_{R_p}(w,t)$ есть выпуклая функция по t при фиксированном w.

С использованием матрицы **C** функция $d_{R_p}(w,t)$ может быть записана в виде

$$d_{R_p}(w,t)=(\mathbf{C}\,w,\, w).$$

Архитектура математических моделей инвестиционного портфеля в условиях гибридной неопределенности

Перейдем к построению эквивалентного детерминированного аналога модели $F_p^{\tau\mathbf{P}}(w)$. Основываясь на технике, развитой в [Язенин и др., 2010; Yazenin et al., 2019], докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть в модели ограничений* $F_p^{\tau\mathbf{P}}(w)$ *случайные параметры нормально распределены:* $a_i(\omega) \in \mathcal{N}_p\left(\hat{a}_i, \hat{d}_{a_i}\right)$, $\sigma_i(\omega) \in \mathcal{N}_p\left(\hat{\sigma}_i, \hat{d}_{\sigma_i}\right)$, $i = 1, \ldots, n$; *нечеткие параметры* $Z_1(\gamma), \ldots, Z_N(\gamma)$ *являются* T_M*-связанными,* $\mu_p(t) \geq \alpha_0$. *Тогда с возможностью* $\mu_p(t)$ *система ограничений* $F_p^{\tau\mathbf{P}}(w)$ *эквивалентна системе ограничений*

$$F_p^{\mu\mathbf{P}}(w) = \begin{cases} m_{R_p}(w, t) + \beta_0 \sqrt{d_{R_p}(w, t)} \geq m_d, \\ \sum_{i=1}^{n} w_i = 1, \\ w \in \mathbb{E}_+^n, \end{cases}$$

где β_0 *– есть решение уравнения* $\mathcal{F}_0^1(x) = 1 - p_0$, *а* $\mathcal{F}_0^1(x)$ *– функция стандартного нормального распределения вероятностей.*

Архитектура математических моделей инвестиционного портфеля в условиях гибридной неопределенности

Замечание 2. При $p_0 > 0.5$ решение уравнения $\mathcal{F}_0^1(x) = 1 - p_0$ есть отрицательное число $\beta_0 < 0$. Следовательно, в этом случае множество допустимых портфелей, определяемое системой $F_p^{\mu\mathbf{P}}(w)$, будет выпуклым, так как функция $m_{R_p}(w,t) + \beta_0\sqrt{d_{R_p}(w,t)}$ будет вогнутой.

Замечание 3. При $p_0 = 0.5$ решение уравнения $\beta_0 = 0$. Следовательно система $F_p^{\mu\mathbf{P}}(w)$ принимает вид

$$F_p^{\mu\mathbf{P}}(w) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} (\hat{a}_i + \hat{\sigma}_i t_i) w_i \geq m_d, \\ \sum_{i=1}^{n} w_i = 1, \\ w \in \mathbb{E}_+^n. \end{cases}$$

Архитектура математических моделей инвестиционного портфеля в условиях гибридной неопределенности

Доказанная выше лемма позволяет доказать теорему, на основании которой может быть построен эквивалентный детерминированный аналог $F_p^{\tau\mathbf{P}}(w)$.

Теорема 5. *Пусть в модели ограничений $F_p^{\tau\mathbf{P}}(w)$ случайные параметры нормально распределены: $a_i(\omega) \in \mathcal{N}_p\left(\hat{a}_i, \hat{d}_{a_i}\right), \sigma_i(\omega) \in \mathcal{N}_p\left(\hat{\sigma}_i, \hat{d}_{\sigma_i}\right), i = 1, \dots, n;$ нечеткие параметры $Z_1(\gamma), \dots, Z_N(\gamma)$ являются T_M-связанными, $\tau = {}'\pi'$. Тогда система ограничений $F_p^{\tau\mathbf{P}}(w)$ эквивалентна системе детерминированных ограничений*

$$F_p^{\pi\mathbf{P}}(w) = \begin{cases} m_{R_p}(w, t^+) + \beta_0 \sqrt{d_{R_p}(w, t^+)} \geq m_d, \\ \sum_{i=1}^{n} w_i = 1, \\ w \in \mathbb{E}_+^n, \end{cases}$$

где $m_{R_p}(w, t^+) = \sum_{i=1}^{n} (\hat{a}_i + \hat{\sigma}_i t_i^+) w_i$, $d_{R_p}(w, t^+) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(t_i^+, t_j^+)\, w_i w_j$, а t_i^+, t_j^+ есть правые границы α_0-уровневых множеств нечетких величин $Z_i(\gamma), Z_j(\gamma)$, соответственно.

Архитектура математических моделей инвестиционного портфеля в условиях гибридной неопределенности

Замечание 4. При $p_0 = 0.5$ и $\tau = '\pi'$ система ограничений $F_p^{\pi\mathbf{P}}(w)$ принимает вид:

$$F_p^{\pi\mathbf{P}}(w) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} (\hat{a}_i + \hat{\sigma}_i t_i) w_i \geq m_d, \\ \sum_{i=1}^{n} w_i = 1, \\ w \in \mathbb{E}_+^n. \end{cases}$$

Следующая теорема устанавливает связь между моделями ограничений $F_p^{\tau\mathbf{E}}(w)$ и $F_p^{\tau\mathbf{P}}(w)$.

Архитектура математических моделей инвестиционного портфеля в условиях гибридной неопределенности

Теорема 6. *Пусть в моделях ограничений* $F_p^{\tau\mathbf{E}}(w)$ *и* $F_p^{\tau\mathbf{P}}(w)$ *случайные параметры нормально распределены:* $a_i(\omega) \in \mathcal{N}_p\left(\hat{a}_i, \hat{d}_{a_i}\right), \sigma_i(\omega) \in \mathcal{N}_p\left(\hat{\sigma}_i, \hat{d}_{\sigma_i}\right), i = 1, \dots, n$, *нечеткие параметры* $Z_1(\gamma), \dots, Z_N(\gamma)$ *являются* T_M*-связанными,* $\tau = '\pi'$. *Тогда, если в модели* $F_p^{\tau\mathbf{P}}(w)$ *уровень вероятности* $p_0 = 0.5$, *то* $F_p^{\pi\mathbf{E}}(w) = F_p^{\pi\mathbf{P}}(w)$.

Замечание 5. Доказанная теорема определяет условия, при которых в модели $F_p^{\pi\mathbf{P}}(w)$ моменты второго порядка не влияют на формирование множества допустимых портфелей, что приводит к совпадению множеств допустимых портфелей, определяемых моделями $F_p^{\pi\mathbf{E}}(w)$ и $F_p^{\pi\mathbf{P}}(w)$.

Архитектура математических моделей инвестиционного портфеля в условиях гибридной неопределенности

Оценка риска портфеля в условиях гибридной неопределенности

В соответствии с обозначенным подходом к определению моментов второго порядка мы можем определить дисперсию портфеля для оценки его риска. Нам необходимо получить формулы (дисперсии) для случая как сильнейшей, так и слабейшей t-норм.

При $T = T_M$ формула (1) приобретает вид

$$D_p^M(w) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\mathbf{D}\left[R_p^{M-}(w,\omega,\alpha)\right] + \mathbf{D}\left[R_p^{M+}(w,\omega,\alpha)\right]\right)d\alpha,$$

где $R_p^{M-}(w,\omega,\alpha)$ и $R_p^{M+}(w,\omega,\alpha)$ – левая и правая границы α-уровневого множества нечеткой случайной величины $R_p^M(w,\omega,\alpha)$:

$$R_p^{M-}(w,\omega,\alpha) = \sum_{i=1}^{n}\left(a_i(\omega) + \sigma_i(\omega)\underline{m}_i\right)w_i - \sum_{i=1}^{n}\sigma_i(\omega)\underline{d}_i w_i * L^{-1}(\alpha),$$

$$R_p^{M+}(w,\omega,\alpha) = \sum_{i=1}^{n}\left(a_i(\omega) + \sigma_i(\omega)\overline{m}_i\right)w_i + \sum_{i=1}^{n}\sigma_i(\omega)\overline{d}_i w_i * R^{-1}(\alpha)$$

Архитектура математических моделей инвестиционного портфеля в условиях гибридной неопределенности

Если все случайные параметры распределений независимы, то после стандартных преобразований получаем формулу для дисперсии:

$$D_p^M(w)= \\ =\sum_{i=1}^{n}\Bigg(\mathbf{D}[a_i(\omega)] \\ +\frac{1}{2}\mathbf{D}[\sigma_i(\omega)]\Bigg(\underline{m}_i^2+\overline{m}_i^2+2\overline{m}_i\overline{d}_i\int_0^1 R^{-1}(\alpha)d\alpha-2\underline{m}_i\underline{d}_i\int_0^1 L^{-1}(\alpha)d\alpha+\overline{d}_i^2\int_0^1\left(R^{-1}(\alpha)\right)^2 d\alpha+\underline{d}_i^2\int_0^1\left(L^{-1}(\alpha)\right)^2 d\alpha\Bigg)\Bigg)w_i^2.$$

Заметим, что если в нечетких случайных величинах нечеткая компонента задается нечеткими числами LR-типа с одинаковыми левой и правой функциями представления формы и коэффициентами нечеткости, т.е. $L(\alpha)=R(\alpha)=S(\alpha), \forall\alpha$ и $\overline{m}_i=\underline{m}_i=m_i, \overline{d}_i=\underline{d}_i=d_i, i=1,\dots,n$, то формула дисперсии принимает более простой вид:

$$D_p^M(w)=\sum_{i=1}^{n}\left(\mathbf{D}[a_i(\omega)]+\mathbf{D}[\sigma_i(\omega)]\left(m_i^2+d_i^2\int_0^1\left(S^{-1}(\alpha)\right)^2 d\alpha\right)\right)w_i^2.$$

Архитектура математических моделей инвестиционного портфеля в условиях гибридной неопределенности

Пример 1. *В том случае, когда коэффициенты сдвига и масштаба* $a_i(\omega), \sigma_i(\omega)$ *являются равномерно распределенными на отрезке [0,1] и независимыми, а функция представления формы* $S(t) = max\{0, 1 - t\}$, $t \geq 0$, *то мы получаем следующую формулу для дисперсии:*

$$D_p^M(w) = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{n}\left(m_i^2 + \frac{1}{3}d_i^2 + 1\right)w_i^2.$$

Архитектура математических моделей инвестиционного портфеля в условиях гибридной неопределенности

Определим теперь дисперсию для t-нормы T_W, описывающей взаимодействие нечетких факторов. Для этого снова воспользуемся формулой (1) для нахождения ковариации двух нечетких случайных величин. При слабейшей t-норме формула для нахождения дисперсии принимает вид:

$$D_p^W(w) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\mathbf{D}\left[R_p^{W-}(w,\omega,\alpha)\right] + \mathbf{D}\left[R_p^{W+}(w,\omega,\alpha)\right]\right)d\alpha,$$

где $R_p^{W-}(w,\omega,\alpha)$ и $R_p^{W+}(w,\omega,\alpha)$, соответственно, левая и правая границы α-уровневого множества доходности портфеля – нечеткой случайной величины $R_p^W(w,\omega,\gamma)$:

$$R_p^{W-}(w,\omega,\alpha) = \sum_{i=1}^{n}\left(a_i(\omega) + \sigma_i(\omega)\underline{m}_i\right)w_i - \max_{i=1\ldots n}\left\{\sigma_i(\omega)\underline{d}_i w_i\right\} * L^{-1}(\alpha),$$

$$R_p^{W+}(w,\omega,\alpha) = \sum_{i=1}^{n}\left(a_i(\omega) + \sigma_i(\omega)\overline{m}_i\right)w_i + \max_{i=1\ldots n}\left\{\sigma_i(\omega)\bar{d}_i w_i\right\} * R^{-1}(\alpha).$$

Архитектура математических моделей инвестиционного портфеля в условиях гибридной неопределенности

Если все случайные параметры распределений независимы, то:

$$\begin{aligned}
&D_p^W(w) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i^2\left(2\mathbf{D}[a_i(\omega)] + \mathbf{D}[\sigma_i(\omega)]\left(\underline{m}_i^2 + \overline{m}_i^2\right)\right) \\
&+ \frac{1}{2}\mathbf{D}\left[\max_{j=1\ldots n}\{\sigma_j(\omega)\overline{d}_j w_j\}\right]\int_0^1 \left(R^{-1}(\alpha)\right)^2 d\alpha \\
&+ \frac{1}{2}\mathbf{D}\left[\max_{j=1\ldots n}\{\sigma_j(\omega)\underline{d}_j w_j\}\right]\int_0^1 \left(L^{-1}(\alpha)\right)^2 d\alpha \\
&+ \sum_{i=1}^{n} w_i\left(\int_0^1 R^{-1}(\alpha)d\alpha\, cov\left((a_i(\omega) + \sigma_i(\omega)\overline{m}_i), \max_{j=1\ldots n}\{\sigma_j(\omega)\overline{d}_j w_j\}\right)\right. \\
&\left. - \int_0^1 L^{-1}(\alpha)d\alpha\, cov\left((a_i(\omega) + \sigma_i(\omega)\underline{m}_i), \max_{j=1\ldots n}\{\sigma_j(\omega)\underline{d}_j w_j\}\right)\right).
\end{aligned}$$

Архитектура математических моделей инвестиционного портфеля в условиях гибридной неопределенности

Как и для случая сильнейшей t-нормы заметим, что если во всех распределениях нечеткая компонента задается нечеткими числами LR-типа с одинаковыми левой и правой функциями представления формы и коэффициентами нечеткости, то слагаемые с ковариацией взаимовычитаются и формула дисперсии принимает более простой вид:

$$D_p^W(w) = \sum_{i=1}^{n} w_i^2\left(\mathbf{D}[a_i(\omega)] + \mathbf{D}[\sigma_i(\omega)]m_i^2\right) + \mathbf{D}\left[\max_{j=1\ldots n}\{\sigma_j(\omega)d_j w_j\}\right]\int_0^1 \left(S^{-1}(\alpha)\right)^2 d\alpha. \quad (5)$$

Архитектура математических моделей инвестиционного портфеля в условиях гибридной неопределенности

Пример 2. *Пусть коэффициенты сдвига и масштаба* $a_i(\omega), \sigma_i(\omega)$ *являются равномерно распределенными на отрезке [0,1] и независимыми. Тогда мы получаем следующую формулу для дисперсии:*

$$D_p^W(w) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i^2\left(\frac{1}{12}\left(\underline{m}_i^2+\overline{m}_i^2\right)+\frac{1}{6}\right) + \frac{1}{2}\left(EMax2(\overline{d}w)-\left(EMax(\overline{d}w)\right)^2\right)\int_0^1\left(R^{-1}(\alpha)\right)^2 d\alpha + \frac{1}{2}\left(EMax2(\underline{d}w)-\left(EMax(\underline{d}w)\right)^2\right)\int_0^1\left(L^{-1}(\alpha)\right)^2 d\alpha + \sum_{i=1}^{n} w_i\left(\int_0^1 R^{-1}(\alpha)d\alpha\,\overline{m}_i\left(\mathbf{E}\left[\sigma_i(\omega)\max_{j=1\ldots n}\{\sigma_j(\omega)\overline{d}_j w_j\}\right]-\frac{1}{2}EMax(\overline{d}w)\right) - \int_0^1 L^{-1}(\alpha)d\alpha\,\underline{m}_i\left(\mathbf{E}\left[\sigma_i(\omega)\max_{j=1\ldots n}\{\sigma_j(\omega)\underline{d}_j w_j\}\right]-\frac{1}{2}EMax(\underline{d}w)\right)\right),$$

Архитектура математических моделей инвестиционного портфеля в условиях гибридной неопределенности

а формула (5) при соответствующих ей предположениях и при $S(t) = max\{0, 1-t\}$, $t \geq 0$ *принимает вид:*

$$D_p^W(w) = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{n} w_i^2(m_i^2+1) + \frac{1}{3}\Big(EMax2(dw) - \big(EMax(dw)\big)^2\Big),$$

где

$$EMax(dw) \coloneqq \mathbf{E}\Big[\max_{i=1\dots n}\{\sigma_i(\omega)d_i w_i\}\Big] = \sum_{i=1}^{n}\frac{(dw)_{(i)}^{n-i+1}}{(n-i+1)(n-i+2)(dw)_{(i+1)}\cdots(dw)_{(n)}},$$

$$EMax2(dw) \coloneqq \mathbf{E}\Big[\Big(\max_{i=1\dots n}\{\sigma_i(\omega)d_i w_i\}\Big)^2\Big] = \sum_{i=1}^{n}\frac{2(dw)_{(i)}^{n-i+2}}{(n-i+2)(n-i+3)(dw)_{(i+1)}\cdots(dw)_{(n)}},$$

а $(dw)_{(1)}, \dots, (dw)_{(n)}$ *есть упорядоченная по возрастанию перестановка элементов* $\{d_1 w_1, \dots, d_n w_n\}$.

Архитектура математических моделей инвестиционного портфеля в условиях гибридной неопределенности

Модели портфеля минимального риска

С учетом результатов, представленных ранее, модели портфеля минимального риска могут быть записаны в виде:

$$D_p^T(w) \to min, \tag{6}$$

$$w \in F_p(w), \tag{7}$$

где $F_p(w) \in \{F_p^{\mu\mathbf{E}}, F_p^{\nu\mathbf{E}}, F_p^{\mu\mathbf{P}}, F_p^{\nu\mathbf{P}}\}$. Всюду далее подразумевается, что в моделях портфеля минимального риска в критерии и ограничениях используется одна и та же t-норма T. Перейдем к их исследованию.

Портфель минимального риска в условиях гибридной неопределенности и модельные расчеты

В качестве модельного примера рассмотрим двумерный портфель ($n = 2$). Пусть $Z_1 = [2.2, 2.2, 0.3, 0.3]_{LR}$, $Z_2 = [1.2, 1.2, 0.4, 0.4]_{LR}$, $L(t) = R(t) = \max\{0, 1 - t\}$, $t \geq 0$, $\alpha = 0.75$. Напомним, что все $a_i(\omega), \sigma_i(\omega)$ являются независимыми случайными величинами с равномерным на отрезке $[0,1]$ распределением. Специфицируем сначала модели портфеля минимального риска при слабейшей t-норме. При сделанных предположениях эквивалентный детерминированный аналог портфеля минимального риска (6)-(7) в контексте меры возможности принимает вид:

$$\frac{73}{150} w_1^2 + \frac{61}{300} w_2^2 + \frac{1}{3}\left(EMax2(dw) - \left(EMax(dw)\right)^2\right) \to min,$$

$$F_p^{\pi\mathbf{E}}(w) = \begin{cases} 1.6w_1 + 1.1w_2 + 0.25 * EMax(dw) \geq m_d, \\ w_1 + w_2 = 1, \\ w_1, w_2 \geq 0, \end{cases}$$

Архитектура математических моделей инвестиционного портфеля в условиях гибридной неопределенности

а в контексте меры необходимости:

$$\frac{73}{150}w_1^2 + \frac{61}{300}w_2^2 + \frac{1}{3}\left(EMax2(dw) - \left(EMax(dw)\right)^2\right) \to min,$$

$$F_p^{\nu\mathbf{E}}(w) = \begin{cases} 1.6w_1 + 1.1w_2 - 0.75 * EMax(dw) \geq m_d, \\ w_1 + w_2 = 1, \\ w_1, w_2 \geq 0. \end{cases}$$

Численно выписать формулы $EMax2(dw)$ и $EMax(dw)$ не представляется возможным, так как они зависят от конкретных значений w_1 и w_2.

Архитектура математических моделей инвестиционного портфеля в условиях гибридной неопределенности

Рассмотрим теперь эту же задачу при сильнейшей t-норме. При сделанных предположениях эквивалентный детерминированный аналог портфеля минимального риска (6)-(7) в контексте меры возможности принимает вид:

$$\frac{587}{1200} w_1^2 + \frac{187}{900} w_2^2 \to min\,,$$

$$F_p^{\pi\mathbf{E}}(w) = \begin{cases} 1.6375 w_1 + 1.15 w_2 \geq m_d, \\ w_1 + w_2 = 1, \\ w_1, w_2 \geq 0, \end{cases}$$

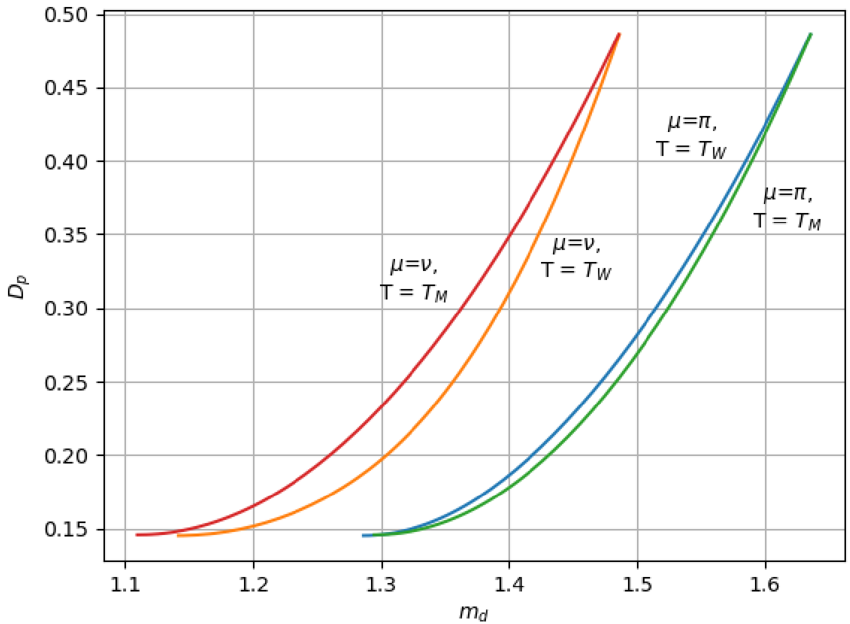
а в контексте меры необходимости:

$$\frac{587}{1200} w_1^2 + \frac{187}{900} w_2^2 \to min,$$

$$F_p^{\nu\mathbf{E}}(w) = \begin{cases} 1.4875 w_1 + 0.95 w_2 \geq m_d, \\ w_1 + w_2 = 1, \\ w_1, w_2 \geq 0. \end{cases}$$

Архитектура математических моделей инвестиционного портфеля в условиях гибридной неопределенности

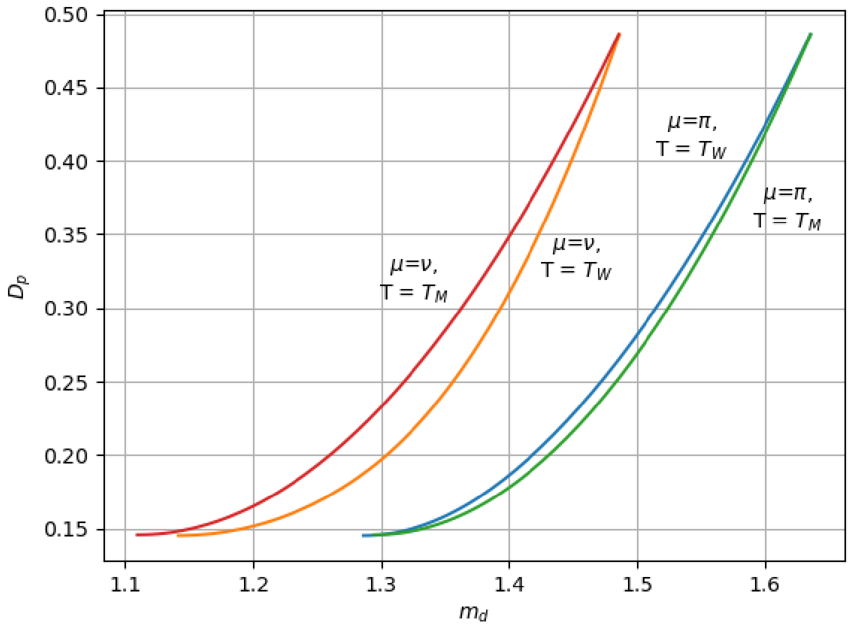
На рисунке изображены множества квазиэффективных (то есть эффективных с заданной возможностью) оценок портфеля в соответствии с его моделями и исходными данными, представленными выше.



Первое, что можно отметить, это поведение множества квазиэффективных оценок портфеля в различных контекстах. Так в контексте возможности мы имеем оптимистическую модель принятия решений, в то время как в контексте необходимости – пессимистическую, которая для заданного уровня ожидаемой доходности дает существенно больший риск.

Архитектура математических моделей инвестиционного портфеля в условиях гибридной неопределенности

На рисунке изображены множества квазиэффективных (то есть эффективных с заданной возможностью) оценок портфеля в соответствии с его моделями и исходными данными, представленными выше.



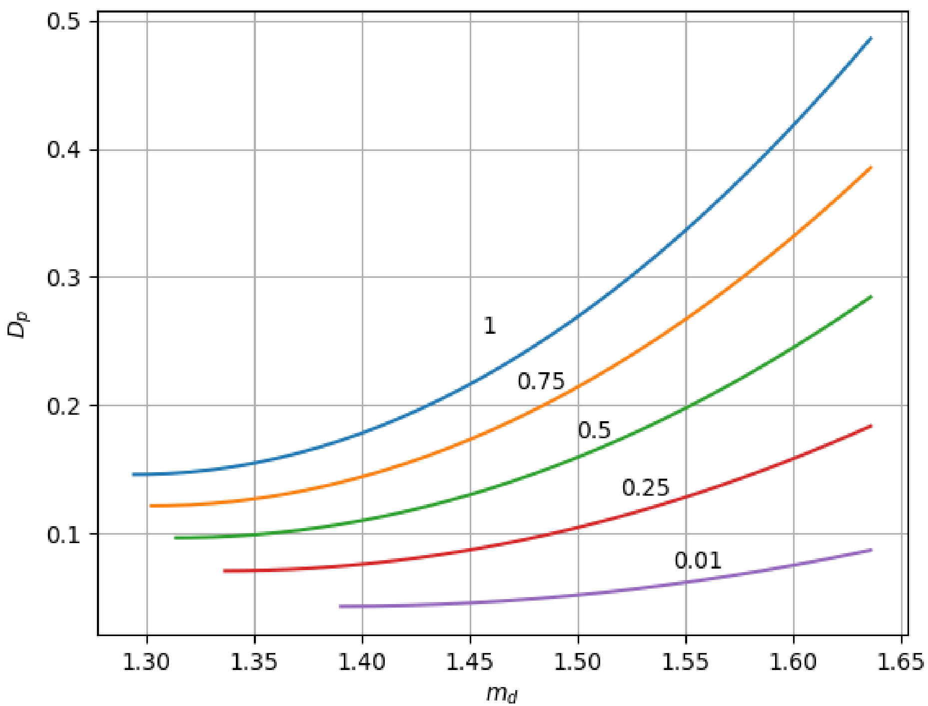
Во-вторых, как видно из рисунка, в контексте меры возможности слабейшая t-норма, обладающая свойством уменьшения неопределенности возможностного типа («размытости» результата), сужает область допустимых решений и делает модель более «строгой» или «осторожной», т.е. риск при фиксированном уровне доходности немного повышается. В контексте необходимости модель ведет себя «противоположным» образом.

Архитектура математических моделей инвестиционного портфеля в условиях гибридной неопределенности

Рассмотрим теперь влияние случайной составляющей в вышеописанных моделях на риск портфеля в случае сильнейшей t-нормы в контексте меры возможности. Проанализируем, как ведет себя решение задачи при различных значениях параметров равномерного распределения коэффициентов масштабирования σ_i. Пусть все они имеют математическое ожидание, равное 0.5, а длины отрезков будут равны, соответственно, 1, 0.75, 0.5, 0.25 и 0.01, то есть. будем постепенно уменьшать разброс (дисперсию) случайной величины от некоторого максимального уровня до «почти неслучайной» величины, все значения которой сосредоточены в очень малой окрестности 0.5.

Архитектура математических моделей инвестиционного портфеля в условиях гибридной неопределенности

На рисунке изображены результаты численных экспериментов.



Результаты согласуются с нашими ожиданиями: чем меньше неопределенность вероятностного типа в условии задачи, тем более гарантированным будет результат и, соответственно, меньшим риск при том же уровне доходности.

Заключение

Проведено комплексное исследование архитектуры математических моделей портфеля минимального риска. Для экстремальных t-норм в контексте возможность/необходимость изучены свойства моделей допустимых портфелей в зависимости от используемых принципов принятия решений в условиях гибридной неопределенности возможностно-вероятностного типа.

На основании подхода Фэнга [Feng et al., 2001] специфицированы формулы для оценки риска портфеля при сильнейшей и слабейшей t-нормах. Полученные теоретические результаты и выводы согласуются с проведенными модельными и численными расчетами.

В плане дальнейших исследований предполагается результаты обобщить на случай, когда приемлемый для инвестора уровень доходности портфеля есть нечеткая величина, связанная с доходностью портфеля возможностным (нечетким) ограничением [Gordeev et al., 2006]. Это позволит более «мягко» и адекватно моделировать предпочтения инвестора.

Список литературы

[Егорова и др., 2017] Егорова Ю.Е., Язенин А.В. К проблеме возможностно-вероятностной оптимизации // Известия РАН. Теория и системы управления, 2017, №4, с.104-120. DOI: 0.7868/S0002338817040096

[Ермольев, 1976] Ермольев Ю.М. Методы стохастического программирования. Главная редакция физико математической литературы издательства «Наука», 1976. 340 с.

[Язенин и др., 2010] Язенин А.В., Шефова Н.А. Об одной возможностно-вероятностной модели портфеля минимального риска // Вестник Тверского государственного университета, №14. Серия «Прикладная математика», выпуск 2 (17), 2010 г., с. 85-95.

[Язенин, 2016] Язенин А.В. Основные понятия теории возможностей. М.: Физматлит, 2016. 142 с.

[Dubois et al., 1988] Dubois, D., Prade, H.: Thes. Application des Connaissances en Informatique. Masson, Paris (1988)

[Feng et al., 2001] Feng, Y., Hu, L., Shu, H.: The variance and covariance of fuzzy random variables and their applications. Fuzzy Sets Syst. 120, 487–497 (2001). doi:10.1016/S0165-0114(99)00060-3

[Hong, 2001] Hong, D.H.: Parameter estimations of mutually T -related fuzzy variables. Fuzzy Sets Syst. 123, 63–71 (2001). doi:10.1016/S0165-0114(00)00113-5

[Gordeev et al., 2006] Gordeev, R.N., Yazenin, A.V.: A method for solving a problem of possibilistic programming. J. Comput. Syst. Sci. Int. 45(3), 442–449 (2006). doi:10.1134/S1064230706030105

Архитектура математических моделей инвестиционного портфеля в условиях гибридной неопределенности

Список литературы

[Nahmias, 1979] Nahmias, S.: Fuzzy variables in a random environment. In: Gupta, M.M., Ragade, R.K., Yager, R.R. (eds.) Advances in Fuzzy Sets Theory and Applications, pp. 165–180. NHCP, Amsterdam (1979)

[Nguyen et al., 1997] Nguyen, H.T., Walker, E.A.: A First Course in Fuzzy Logic. CRC Press, Boca Raton (1997)

[Markowitz, 1952] Markowitz, H.M.: Portfolio selection. J. Finance 7(1), 77–91 (1952). doi:10.2307/2975974

[Mesiar, 1997] Mesiar, R.: Triangular-norm-based addition of fuzzy intervals. Fuzzy Sets Syst. 91,231–237 (1997). doi:10.1016/S0165-0114(97)00143-7

[Yazenin et al., 1996] Yazenin, A., Wagenknecht, M.: Possibilistic Optimization. Brandenburgische Technische Universitat, Cottbus (1996)

[Yazenin, 2007] Yazenin, A.V.: Possibilistic-probabilistic models and methods of portfolio optimization. In: Batyrshin, I., Kacprzyk, J. et al. (eds.) Studies in Computational Intelligence, vol. 36, pp. 241–259. Springer, Heidelberg (2007). doi:10.1007/978-3-540-36247-0 9

[Yazenin et al., 2019] A. Yazenin, I. Soldatenko, “On the Problem of Possibilistic-Probabilistic Optimization with Constraints on Possibility/Probability”, *Lecture Notes in Computer Science*, WILF 2018, Advances in Intelligent Systems and Computing, **11291**, eds. Giove S.,Masulli F.,Fuller R., Springer, Cham, 2019, 43-54

НСМВИТ-2020
29 ИЮНЯ - 1 ИЮЛЯ 2020 Г., Г. СМОЛЕНСК

Спасибо за внимание!

Контакты докладчика:

Александр Васильевич Язенин

Yazenin.AV@tversu.ru

СМОЛЕНСКИЙ ФИЛИАЛ МЭИ