УДК 519.8

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ПОРТФЕЛЯ МИНИМАЛЬНОГО РИСКА В УСЛОВИЯХ ГИБРИДНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ[1]

А.В. Язенин (*Yazenin.AV@tversu.ru*)
И.С. Солдатенко (*soldis@tversu.ru*)
Тверской государственный университет, Тверь

Разработана и исследована модель портфеля минимального риска в условиях гибридной неопределенности возможностно-вероятностного типа. Взаимодействие нечетких параметров описывается как сильнейшей, так и слабейшей t-нормами. Модели допустимых портфелей основаны на принципе ожидаемой доходности или на основе выполнения ограничения по возможности/необходимости и вероятности на уровень доходности портфеля. Построены эквивалентные детерминированные аналоги.

Ключевые слова: портфель минимального риска, гибридная неопределенность, возможность, необходимость, ожидаемая доходность, ограничение по возможности/вероятности, сильнейшая t-норма, слабейшая t-норма

Введение

В статье представлены архитектура моделей и некоторые непрямые методы решения задач оптимизации портфеля в условиях гибридной неопределенности возможностно-вероятностного типа, дополняющие ранее полученные авторами результаты в этом научном направлении [Язенин, 1991; Язенин, 1997; Язенин и др., 2010; Yazenin, 2007; Yazenin et al., 2018; Egorova et al., 2018]. Основное внимание уделено исследованию ситуаций, когда взаимодействие нечетких факторов модели описывается как сильнейшей так слабейшей t-нормами, что позволяет оценить диапазон изменения риска и поведение множества допустимых портфелей, то есть управлять нечеткостью при принятии инвестиционных решений. Для снятия в модели допустимых портфелей неопределенности вероятностного типа при принятии решений используется принцип,

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00669).

основанный на ожидаемой возможности, а также на требовании выполнения ограничения на уровень доходности по вероятности. Неопределенность возможностного (нечеткого) типа снимается путем наложения требований по возможности/необходимости выполнения ограничений на приемлемый уровень ожидаемой доходности (или доходности) портфеля. Установлена и исследована связь между моделями допустимых портфелей различной архитектуры. В ряде релевантных работ, посвященных проблеме выбора портфеля, исследуется лишь ситуация, когда взаимодействие нечетких факторов описывается сильнейшей t-нормой (см., например, [Xu, 2011]). Теоретические результаты и выводы подтверждаются числовыми расчетами.

1. Необходимые понятия и обозначения

В контексте работ [Nahmias, 1979; Язенин, 2016; Feng et al., 2001; Dubois et al., 1988; Nguyen et al., 1997; Mesiar, 1997; Hong, 2001] введем ряд определений и понятий из теории возможностей. Пусть далее (Γ, P(Γ), τ) и (Ω, B, **P**) есть возможностное и вероятностное пространства, соответственно, в которых Ω – пространство элементарных событий ω ∈ Ω, Γ – модельное пространство с элементами γ ∈ Γ, B – σ-алгебра событий, P(Γ) – множество всех подмножеств Γ, τ ∈ {π, ν}, π и ν – меры возможности и необходимости, соответственно, а **P** – мера вероятности; $\mathbb{E}^1$ – числовая прямая.

Дадим определение нечеткой случайной (возможностно-вероятностной) величины и ее распределения [Язенин, 2016; Yazenin et al., 1996].

Определение 1. *Нечеткая случайная величина Y(ω, γ) есть вещественная функция* $Y:\Omega\times\Gamma\to\mathbb{E}^1$ *σ-измеримая для каждого фиксированного γ, а функция* $\mu_Y(\omega,t)=\pi\{\gamma\in\Gamma:Y(\omega,\gamma)=t\},\forall t\in\mathbb{E}^1$ *называется ее функцией распределения.*

Из определения 1 следует, что функция распределения нечеткой случайной величины зависит от случайного параметра, т. е. является случайной функцией.

Определение 2. *Пусть Y(ω, γ) – нечеткая случайная величина. Её ожидаемым значением* **E**[*Y*] *называется нечеткая величина, для которой* $\mu_{\mathbf{E}[Y]}(t)=\pi\{\gamma\in\Gamma:\mathbf{E}[Y(\omega,\gamma)]=t\},\forall t\in\mathbb{E}^1$ *есть функция распределения возможностей, где* **E** *— оператор взятия математического ожидания* $\mathbf{E}[Y(\omega,\gamma)]=\int_\Omega Y(\omega,\gamma)\mathbf{P}(d\omega)$.

Функция распределения ожидаемого значения нечеткой случайной величины уже не зависит от случайного параметра и является нечеткой величиной.

Определим, следуя [Feng et al., 2001], моменты второго порядка. Пусть X и Y – нечеткие случайные величины.

Определение 3. *Ковариация нечетких случайных величин X и Y есть:*

$$cov\left(X,Y\right)=\frac{1}{2}\int_0^1\left(cov\left(X_\omega^-\left(\alpha\right),Y_\omega^-\left(\alpha\right)\right)+cov\left(X_\omega^+\left(\alpha\right),Y_\omega^+\left(\alpha\right)\right)\right)d\alpha,$$

где $X_\omega^-\left(\alpha\right),Y_\omega^-\left(\alpha\right)$, $X_\omega^+\left(\alpha\right),Y_\omega^+\left(\alpha\right)$ *– суть границы α-уровневых множеств нечетких величин* X_ω,Y_ω, *соответственно.*

Определение 4. *Дисперсия нечеткой случайной величины Y есть*

$$\mathbf{D}[Y] = cov(Y, Y). \qquad (1)$$

Определяемые в соответствии с рассматриваемым подходом математическое ожидание, дисперсия и ковариация нечетких случайных величин наследуют основные свойства аналогичных характеристик вещественных случайных величин.

Для моделирования нечетких величин часто используется распределение LR-типа [Dubois et al., 1988], которое для нечеткой величины $Y(\gamma)$ записывается, как правило, в виде $\mu_Y\left(t\right)=\left[\underline{m},\overline{m},\underline{d},\overline{d}\,\right]_{LR}$, далее мы просто будем писать $Y\left(\gamma\right)=\left[\underline{m},\overline{m},\underline{d},\overline{d}\,\right]_{LR}$. Здесь $\underline{m},\overline{m}$ есть левая и правая границы интервала толерантности, $\underline{d},\overline{d}$ – коэффициенты нечеткости, при этом $\underline{m}\le\overline{m}$ и $\underline{d}>0,\overline{d}>0$, а $L(t)$ и $R(t)$ – функции представления левой и правой форм нечеткости возможностного распределения.

Для агрегирования нечеткой информации будем использовать t-нормы, которые обобщают операцию типа «min», заложенную в действиях над нечеткими множествами и нечеткими величинами [Nguyen et al., 1997].

Особый интерес представляют t-нормы

$$T_M\left(x,y\right)=\min\left\{x,y\right\}\ \text{ и }\ T_W\left(x,y\right)=\begin{cases}\min\left\{x,y\right\},\text{если}\max\left\{x,y\right\}=1,\\ 0,\text{иначе,}\end{cases}$$

которые являются экстремальными, где T_M называется сильнейшей, а T_W – слабейшей t-нормой.

2. Математические модели портфеля минимального риска в условиях гибридной неопределенности

2.1 Доходность портфеля в условиях гибридной неопределенности возможностно-вероятностного типа. В условиях гибридной неопределенности возможностно-вероятностного типа доходность инвестиционного портфеля может быть представлена нечеткой случайной функцией

$$R_p\left(w,\omega,\gamma\right)=\sum_{i=1}^{n}R_i\left(\omega,\gamma\right)w_i, \qquad (2)$$

которая является линейной функцией долей капитала $w = (w_1, \ldots, w_n)$ в портфеле. Здесь $R_i(\omega, \gamma)$ – нечеткие случайные величины, моделирующие доходности отдельных финансовых активов, имеющие сдвиг-масштабное представление [Язенин, 2016]:

$$R_i(\omega, \gamma) = a_i(\omega) + \sigma_i(\omega) Z_i(\gamma). \tag{3}$$

Всюду далее мы предполагаем, что в представлении (3) нечеткие величины $Z_i(\gamma) = \left[\underline{m}_i, \bar{m}_i, \underline{d}_i, \bar{d}_i\right]_{LR}$ взаимно T-связаны, где $T \in \{T_M, T_W\}$ [18], а $a_i(\omega), \sigma_i(\omega)$ есть коэффициенты сдвига и масштаба – случайные величины, определенные на вероятностном пространстве (Ω, B, **P**), причем $\sigma_i(\omega) \geq 0.$ Тогда возможностное распределение доходности портфеля (2) принимает вид

$$R_p^T(w, \omega, \gamma) = [\underline{m}_{R_p}(w, \omega), \bar{m}_{R_p}(w, \omega), \underline{d}_{R_p^T}(w, \omega), \bar{d}_{R_p^T}(w, \omega)]_{LR}, \tag{4}$$

где

$$\underline{m}_{R_p}(w, \omega) = \sum\nolimits_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \left(a_i(\omega) + \sigma_i(\omega) \underline{m}_i\right) w_i, \ \ \bar{\mathrm{m}}_{R_p}(w, \omega) = \sum\nolimits_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \left(a_i(\omega) + \sigma_i(\omega) \bar{m}_i\right) w_i,$$

а коэффициенты нечеткости принимают вид в зависимости от вида Т:

$$\underline{d}_{R_p^M}(w, \omega) = \sum\nolimits_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \sigma_i(\omega) \underline{d}_i w_i, \ \ \bar{d}_{R_p^M}(w, \omega) = \sum\nolimits_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \sigma_i(\omega) \bar{d}_i w_i,$$

когда T=T_M, и

$$\underline{d}_{R_p^W}(w, \omega) = \max_{i=1 \ldots n} \left\{\sigma_i(\omega) \underline{d}_i w_i\right\}, \ \ \bar{d}_{R_p^W}(w, \omega) = \max_{i=1 \ldots n} \left\{\sigma_i(\omega) \bar{d}_i w_i\right\},$$

в случае T=T_W. Всюду далее будем обозначать $R_p^T(w, \omega, \gamma)$ как $R_p^M(w, \omega, \gamma)$ при T=T_M и $R_p^W(w, \omega, \gamma)$ при T=T_W.

Для снятия неопределенности вероятностного типа в соответствии с развиваемым нами подходом [Yazenin, 2007] необходимо идентифицировать возможностное распределение математического ожидания функции $R_p^T(w, \omega, \gamma)$, то есть вычислить его параметры. Ожидаемая доходность портфеля в моделях портфельного анализа является при фиксированном w нечеткой величиной. Об этом говорят результаты следующих теорем.

Теорема 1. *Пусть* T=T_M. *Тогда ожидаемая доходность портфеля* $\hat{R}_p^M(w, \gamma)$ *характеризуется возможностным распределением*

$$\hat{R}_p^M(w, \gamma) = \mathbf{E}\left[R_p^M(w, \omega, \gamma)\right] = \left[\underline{m}_{\hat{R}_p}(w), \bar{m}_{\hat{R}_p}(w), \underline{d}_{\hat{R}_p^M}(w), \bar{d}_{\hat{R}_p^M}(w)\right]_{LR},$$

где $\underline{m}_{\hat{R}_p}(w) = \sum\nolimits_{i=1}^{n} (\hat{a}_i + \hat{\sigma}_i \underline{m}_i) w_i, \ \bar{m}_{\hat{R}_p}(w) = \sum\nolimits_{i=1}^{n} (\hat{a}_i + \hat{\sigma}_i \bar{m}_i) w_i,$

$$\underline{d}_{\hat{R}_p^M}(w)=\sum_{i=1}^{n}\hat{\sigma}_i\underline{d}_i w_i, \bar{d}_{\hat{R}_p^M}(w)=\sum_{i=1}^{n}\hat{\sigma}_i\bar{d}_i w_i, \hat{a}_i=\mathbf{E}\left[a_i(\omega)\right], \hat{\sigma}_i=\mathbf{E}\left[\sigma_i(\omega)\right].$$

Теорема 2. *Пусть $T=T_W$. Тогда ожидаемая доходность портфеля $\hat{R}_p^M(w,\gamma)$ характеризуется возможностным распределением*

$$\hat{R}_p^W(w,\gamma)=\mathbf{E}\left[R_p^W(w,\omega,\gamma)\right]=\left[\underline{m}_{\hat{R}_p}(w),\bar{m}_{\hat{R}_p}(w),\underline{d}_{\hat{R}_p^W}(w),\bar{d}_{\hat{R}_p^W}(w)\right]_{LR},$$

где $\underline{d}_{\hat{R}_p^W}(w)=\mathbf{E}\left[\max\limits_{i=1\ldots n}\left\{\sigma_i(\omega)\underline{d}_i w_i\right\}\right], \bar{d}_{\hat{R}_p^W}(w)=\mathbf{E}\left[\max\limits_{i=1\ldots n}\left\{\sigma_i(\omega)\bar{d}_i w_i\right\}\right].$

2.2 Модели допустимых портфелей в условиях гибридной неопределенности возможностно-вероятностного типа

В соответствии с классическим подходом Марковица [Markowitz, 1952] в модели портфеля минимального риска нам необходимо построить функцию риска портфеля. Ожидаемую доходность или доходность портфеля можно внести в систему ограничений. Так как ожидаемая доходность портфеля в случае нечетких случайных данных есть нечеткая величина, то для снятия неопределенности возможностного типа в систему ограничений, определяющую множество допустимых портфелей, можно ввести ограничение по мере возможности/необходимости на приемлемый для инвестора уровень ожидаемой доходности, который в общем случае может быть нечетким. Тогда обобщенная модель допустимых портфелей по Марковицу может быть представлена в виде

$$F_p^{\tau\mathbf{E}}(w)=\begin{cases}\tau\left\{\hat{R}_p^T(w,\gamma)\ \ \mathcal{R}\ \ m_d\right\}\geq\alpha,\\ \sum w_i=1, i=1,\ldots,n,\\ w\in\mathbb{E}_+^n,\end{cases}$$

где $\mathbb{E}_+^n=\left\{x\in\mathbb{E}^n : x\geq 0\right\}$, $\hat{R}_p^T(w,\gamma)$ — ожидаемая доходность, $\mathcal{R}$ – четкое отношение $\{\geq, =\}$; $\alpha\in(0, 1]$, m_d – уровень доходности, приемлемый для инвестора, $T\in\left\{T_M, T_W\right\}$.

Следующая теорема позволяет построить эквивалентный детерминированный аналог моделей допустимых портфелей при τ=’π’.

Теорема 3. *Пусть в модели ограничений* $F_p^{\tau\mathbf{E}}$ τ=’π’, $\mathcal{R}$ = '$\geq$'. *Тогда эквивалентная детерминированная модель допустимых портфелей имеет вид*:

$$F_p^{\pi\mathbf{E}}(w)=\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{a}_i+\hat{\sigma}_i\bar{m}_i\right)w_i+\bar{d}_{\hat{R}_p^T}(w)*R^{-1}(\alpha)\geq m_d,\\ \sum w_i=1, i=1,\ldots,n,\\ w\in\mathbb{E}_+^n.\end{cases}$$

В том случае, когда доходность, определяемая (2), вносится в систему ограничений, гибридную неопределенность можно снять путем наложения ограничения по возможности/необходимости и вероятности на приемлемый уровень доходности. Формально, математическая модель такого ограничения может быть записана в виде:

$$F_p^{\tau\mathbf{P}}(w)=\begin{cases}\tau\left\{\mathbf{P}\left\{R_p\left(w,\omega,\gamma\right)\ \mathcal{R}m_d\right\}\geq p_0\right\}\geq\alpha_0,\\ \sum w_i=1, i=1,\ldots,n,\\ w\in\mathbb{E}_+^n,\end{cases}$$

где $\mathbf{P}$ – вероятностная мера, $p_0\in(0,1]$ – уровень вероятности.

2.3 Оценка риска портфеля в условиях гибридной неопределенности

В соответствии с обозначенным подходом к определению моментов второго порядка мы можем определить дисперсию портфеля для оценки его риска. Определим дисперсию для t-нормы T_W, описывающей взаимодействие нечетких факторов. Для этого воспользуемся формулой (1) для нахождения ковариации двух нечетких случайных величин. При слабейшей t-норме, если все случайные параметры распределений независимы, то после соответствующих преобразований окончательная формула для дисперсии, позволяющая определить риск портфеля, имеет вид:

$$D_p^W(w)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}w_i^2\left(2\mathbf{D}\left[a_i(\omega)\right]+\mathbf{D}\left[\sigma_i(\omega)\right]\left(\underline{m}_i^2+\bar{m}_i^2\right)\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\mathbf{D}\left[\max_{j=1\ldots n}\left\{\sigma_j(\omega)\bar{d}_jw_j\right\}\right]\int_0^1\left(R^{-1}(\alpha)\right)^2d\alpha+\frac{1}{2}\mathbf{D}\left[\max_{j=1\ldots n}\left\{\sigma_j(\omega)\underline{d}_jw_j\right\}\right]\int_0^1\left(L^{-1}(\alpha)\right)^2d\alpha+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}w_i\left(\int_0^1R^{-1}(\alpha)d\alpha cov\left(\left(a_i(\omega)+\sigma_i(\omega)\bar{m}_i\right),\max_{j=1\ldots n}\left\{\sigma_j(\omega)\bar{d}_jw_j\right\}\right)-\right.$$

$$\left.-\int_0^1L^{-1}(\alpha)d\alpha cov\left(\left(a_i(\omega)+\sigma_i(\omega)\underset{-}{m}_i\right),\max_{j=1\ldots n}\left\{\sigma_j(\omega)\underset{-}{d}_jw_j\right\}\right)\right)$$

При $T=T_M$ формула получается аналогичным образом.

2.4 Модели портфеля минимального риска

С учетом результатов, представленных в разделах 2.1, 2.2 и 2.3, модели портфеля минимального риска могут быть записаны в виде:

$$D_p^T(w)\rightarrow min, \tag{5}$$

$$w\in F_p(w), \tag{6}$$

где $F_p(w) \in \left\{ F_p^{\mu\mathbf{E}}, F_p^{\nu\mathbf{E}}, F_p^{\mu\mathbf{P}}, F_p^{\nu\mathbf{P}} \right\}$. Всюду далее подразумевается, что в моделях портфеля минимального риска в критерии и ограничениях используется одна и та же t-норма T. Перейдем к их исследованию.

3. Портфель минимального риска в условиях гибридной неопределенности и модельные расчеты

В качестве модельного примера рассмотрим двумерный портфель (*n=2*). Пусть $Z_1=[2.2, 2.2, 0.3, 0.3]_{LR}$, $Z_2=[1.2, 1.2, 0.4, 0.4]_{LR}$, $L(t)=R(t)=max\{0, 1-t\}, t \geq 0$, $\alpha=0.75$. Напомним, что все $a_i(\omega)$, $\sigma_i(\omega)$ являются независимыми случайными величинами с равномерным на отрезке [0,1] распределением. Специфицируем сначала модели портфеля минимального риска при слабейшей t-норме. При сделанных предположениях эквивалентный детерминированный аналог портфеля минимального риска (5)-(6) в контексте меры возможности принимает вид:

$$\frac{73}{150}w_1^2 + \frac{61}{300}w_2^2 + \frac{1}{3}\left(EMax2(dw) - \left(EMax(dw) \right)^2 \right) \to min,$$

$$F_p^{\pi\mathbf{E}}(w) = \begin{cases} 1.6w_1 + 1.1w_2 + 0.25 * EMax(dw) \geq m_d, \\ w_1 + w_2 = 1, \\ w_1, w_2 \geq 0, \end{cases}$$

а в контексте меры необходимости:

$$\frac{73}{150}w_1^2 + \frac{61}{300}w_2^2 + \frac{1}{3}\left(EMax2(dw) - \left(EMax(dw) \right)^2 \right) \to min,$$

$$F_p^{\nu\mathbf{E}}(w) = \begin{cases} 1.6w_1 + 1.1w_2 - 0.75 * EMax(dw) \geq m_d, \\ w_1 + w_2 = 1, \\ w_1, w_2 \geq 0, \end{cases}$$

где

$$EMax(dw) = \mathbf{E}\left[\max_{i=1\ldots n} \left\{ \sigma_i(\omega) d_i w_i \right\} \right], \quad EMax2(dw) = \mathbf{E}\left[\left(\max_{i=1\ldots n} \left\{ \sigma_i(\omega) d_i w_i \right\} \right)^2 \right],$$

а $(\mathrm{d}w)_{(1)}, \ldots, (\mathrm{d}w)_{(\mathrm{n})}$ есть упорядоченная по возрастанию перестановка элементов $\left\{ \mathrm{d}_1 w_1, \ldots, \mathrm{d}_\mathrm{n} w_\mathrm{n} \right\}$.

Для сравнительного анализа была рассмотрена эта же задача при сильнейшей t-норме. Результаты представлены на Рис. 1. Заметим, что в нашем примере при *n=2* независимой является только одна переменная, поэтому для решения задачи можно не привлекать сложные оптимизационные методы, а использовать обычный перебор с некоторым шагом всех возможных значений $w_1 \in [0,1]$.

На Рис. 1 изображены множества квазиэффективных (то есть эффективных с заданной возможностью) оценок портфеля в соответствии с его моделями и исходными данными, представленными выше. Первое, что можно отметить, это поведение множества квазиэффективных оценок портфеля в различных контекстах. Так в контексте возможности мы имеем оптимистическую модель принятия решений, в то время как в контексте необходимости – пессимистическую, которая для заданного уровня ожидаемой доходности дает существенно больший риск.
Во-вторых, как видно из рисунка, в контексте меры возможности слабейшая t-норма, обладающая свойством уменьшения неопределенности возможностного типа («размытости» результата, см., например [Язенин, 2016]), сужает область допустимых решений и делает модель более «строгой» или «осторожной», т.е. риск при фиксированном уровне доходности немного повышается.

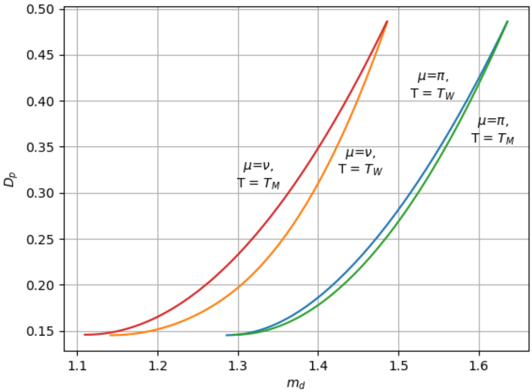

Рис. 1: Множества квазиэффективных портфелей в зависимости от меры возможности/необходимости и t-нормы

В контексте необходимости модель ведет себя «противоположным» образом. Таким образом, можно сказать, что слабейшая t-норма снижает «уровень оптимизма» в оптимистической модели и снижает уровень «пессимизма» в пессимистической модели.

Заключение

В работе проведено комплексное исследование архитектуры математических моделей портфеля минимального риска. Для экстремальных t-норм (слабейшей и сильнейшей) в контексте возможность/необходимость изучены свойства моделей допустимых портфелей в зависимости от используемых принципов принятия решений в условиях гибридной неопределенности возможностно-вроятностного типа.

На основании подхода Фэнга [Feng et al., 2001] специфицированы формулы для оценки риска портфеля при сильнейшей и слабейшей t-нормах. Полученные теоретические результаты и выводы согласуются с проведенными модельными и численными расчетами.

В плане дальнейших исследований предполагается результаты статьи обобщить на случай, когда приемлемый для инвестора уровень доходности портфеля есть нечеткая величина, связанная с доходностью портфеля возможностным (нечетким) ограничением [Gordeev et al., 2006]. Это позволит более «мягко» и адекватно моделировать предпочтения инвестора.

Список литературы

[Егорова и др., 2017] Егорова Ю.Е., Язенин А.В. К проблеме возможностно-вероятностной оптимизации // Известия РАН. Теория и системы управления. 2017. №4. С.104-120. doi:0.7868/S0002338817040096

[Ермольев, 1976] Ермольев Ю.М. Методы стохастического программирования. Главная редакция ФИЗМАТЛИТ издательства «Наука», 1976. 340 с.

[Язенин, 1991] Язенин А.В. Линейное программирование со случайными нечеткими данными // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1991. № 3. С.52-58.

[Язенин, 1997] Язенин А.В. О методе решения одной задачи линейного программирования со случайными нечеткими данными // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1997. № 5. С.91-95.

[Язенин и др., 2010] Язенин А.В., Шефова Н.А. Об одной возможностно-вероятностной модели портфеля минимального риска // Вестник Тверского государственного университета. Серия Прикладная математика. № 2 (17). 2010. С. 85-95.

[Язенин, 2016] Язенин А.В. Основные понятия теории возможностей. М.: Физматлит, 2016. 142 с.

[Dubois et al., 1988] Dubois, D., Prade, H.: Thes. Application des Connaissances en Informatique. Masson, Paris, 1988.

[Egorova et al., 2018] Egorova Yu.E., Yazenin A.V. A method for minimum risk portfolio optimization under hybrid uncertainty // Journal of Physics: Conference Series. 2018. V. 973. Art. no. 012033.

[Feng et al., 2001] Feng Y., Hu L., Shu H. The variance and covariance of fuzzy random variables and their applications // Fuzzy Sets and Systems. 2001. Vol. 120. Pp. 487–49. doi:10.1016/S0165-0114(99)00060-3

[Hong, 2001] Hong D.H. Parameter estimations of mutually T -related fuzzy variables // Fuzzy Sets and Systems. 2001. Vol. 123. Pp. 63–71. doi:10.1016/S0165-0114(00)00113-5

[Gordeev et al., 2006] Gordeev R.N., Yazenin A.V. A method for solving a problem of possibilistic programming // J. Comput. Syst. Sci. Int. 2006. № 45(3). Pp. 442-449. doi:10.1134/S1064230706030105

[Markowitz, 1952] Markowitz H.M. Portfolio selection // J. Finance. 1952. № 7(1). Pp. 77–91. doi:10.2307/2975974

[Mesiar, 1997] Mesiar R. Triangular-norm-based addition of fuzzy intervals // Fuzzy Sets and Systems. 1997. Vol. 91. Pp. 231–237. doi:10.1016/S0165-0114(97)00143-7

[Nahmias, 1979] Nahmias S. Fuzzy variables in a random environment. In: Gupta M.M., Ragade R.K., Yager R.R. (eds.) Advances in Fuzzy Sets Theory and Applications. Pp. 165-180. NHCP, Amsterdam, 1979.

[Nguyen et al., 1997] Nguyen H.T., Walker E.A. A First Course in Fuzzy Logic. CRC Press, Boca Raton, 1997.

[Xu, 2011] Xu J., Zhou X. Fuzzy-Like Multiple Objective Decision Making. Studies in Fuzziness and Soft Computing. Vol. 263. Springer, Berlin, 2011. doi:10.1007/978-3-642-16895-6

[Yazenin et al., 1996] Yazenin A., Wagenknecht M. Possibilistic Optimization. Brandenburgische Technische Universitat, Cottbus, 1996.

[Yazenin, 2007] Yazenin A.V. Possibilistic-probabilistic models and methods of portfolio optimization. In: Batyrshin, I., Kacprzyk, J. et al. (eds.) Studies in Computational Intelligence. Vol. 36. Pp. 241–259. Springer, Heidelberg, 2007. doi:10.1007/978-3-540-36247-0 9

[Yazenin et al., 2018] Yazenin A., Soldatenko I. A Portfolio of Minimum Risk in a Hybrid Uncertainty of a Possibilistic-Probabilistic Type: Comparative Study // Advances in Fuzzy Logic and Technology 2017. Proceedings of the Conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology. Cham: Springer, 2018. P.551-563. http://doi.org/10.1007/978-3-319-66827-7_51

[Yazenin et al., 2019] Yazenin A., Soldatenko I. On the Problem of Possibilistic-Probabilistic Optimization with Constraints on Possibility/Probability. Lecture Notes in Computer Science, WILF 2018. Giove S., Masulli F., Fuller R. (eds.). Advances in Intelligent Systems and Computing. Vol. 11291. Springer, Cham, 2019. Pp. 43-54.

ON ONE MODEL OF A MINIMAL RISK PORTFOLIO UNDER HYBRID UNCERTAINTY

A.V. Yazenin (*Yazenin.AV@tversu.ru*)
I.S. Soldatenko (*soldis@tversu.ru*)
Tver State University, Tver

A minimal risk portfolio model has been developed and studied under conditions of hybrid uncertainty of the possibility-probability type. The interaction of fuzzy parameters is described by both the strongest and weakest t-norms. Models of acceptable portfolios are based on the principle of expected profitability or on the basis of fulfilling the limit on the possibility/necessity and probability of the level of return of the portfolio. Equivalent deterministic analogs are constructed.

Keywords: minimum risk portfolio, hybrid uncertainty, opportunity, necessity, expected profitability, possibility/probability constraint, strongest t-norm, weakest t-norm.