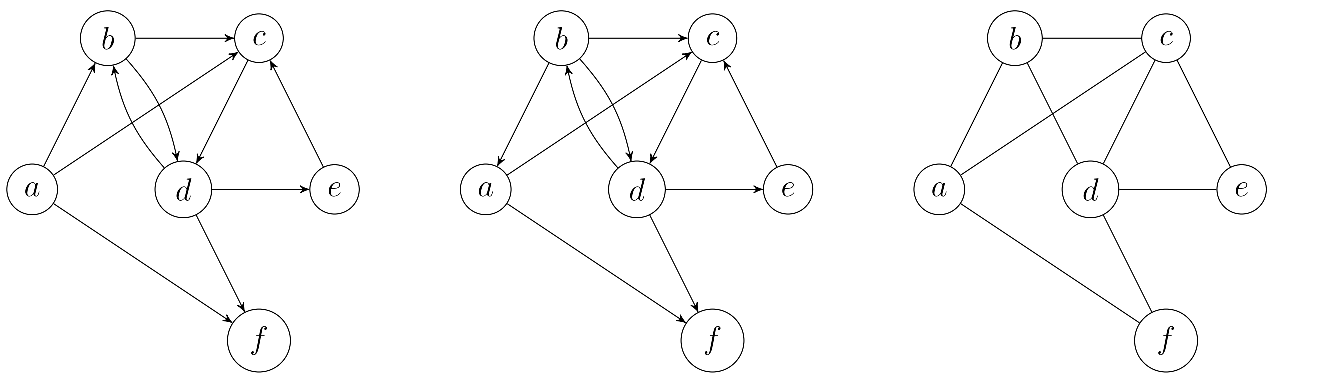
Задачи на графы.

Основные понятия.

Определение 1. *Ориентированный граф состоит из множества вершин и множества рёбер. Каждое ребро соединяет какие-то две вершины. Неориентированный граф отличается от ориентированного тем, что его рёбра не имеют направления.*

Если в графе G из вершины x в вершину y идёт ребро, то x называется непосредственным предшественником y.

Мы рассмотрим два способа задания графа. Первый способ — графический. Вершины графа изображаются точками или кружками, а ребро из вершины x в вершину y изображается стрелкой из x в y. Если граф неориентированный, то ребро изображается отрезком без стрелки. На рис. 1 изображены ориентированные графы G_1 и G_2 и неориентированный граф G_3. Графы G_1 и G_2 различны, так как в G_1 ребро идёт из вершины a в вершину b, а в графе G_2 наоборот.



Ориентированный граф G_1. Ориентированный граф G_2. Неориентированный граф G_3.

Рис. 1: Примеры графов.

Другой способ представления графов — задание их в виде таблиц. Если граф содержит n вершин, то мы строим таблицу размера $n \times n$, строки и столбцы которой помечены вершинами графа. На пересечении строки, помеченной x, и столбца, помеченного y, ставится 1, если в графе есть ребро, ведущее из x в y, и ставится 0, если такого ребра нет. Поскольку в неориентированных графах рёбра не имеют направления, то таблицы неориентированных графов всегда будут симметричными. На рис. 2 показаны таблицы графов G_1, G_2 и G_3 с рис. 1.

	a	b	c	d	e	f
a	0	1	1	0	0	1
b	0	0	1	1	0	0
c	0	0	0	1	0	0
d	0	1	0	0	1	1
e	0	0	1	0	0	0
f	0	0	0	0	0	0

Таблица графа G_1.

	a	b	c	d	e	f
a	0	1	1	0	0	1
b	0	0	1	1	0	0
c	0	0	0	1	0	0
d	0	1	0	0	1	1
e	0	0	1	0	0	0
f	0	0	0	0	0	0

Таблица графа G_2.

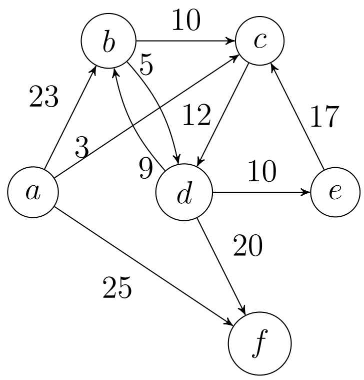
	a	b	c	d	e	f
a	0	1	1	0	0	1
b	1	0	1	1	0	0
c	1	1	0	1	1	0
d	0	1	1	0	1	1
e	0	0	1	1	0	0
f	1	0	0	1	0	0

Таблица графа G_3.

Рис. 2: Таблицы для графов G_1, G_2, G_3.

Определение 2. *Нагруженный (размеченный) граф — это граф, каждому ребру которого сопоставлена дополнительная информация.*

Нагруженные графы можно задавать теми же способами, что и обычные. Если граф задан в виде рисунка, то информация записывается на рёбрах. Если граф задан в виде таблицы, то вместо 1 записывается информация, связанная с ребром. Поскольку ребру может быть сопоставлен 0, то в случае отсутствия ребра мы будем писать прочерк – или оставлять пустое место. Нагрузим для примера граф G_1. На рис. 3 показаны оба способа задания графа.



Нагруженный граф G_1.

	a	b	c	d	e	f
a	–	23	3	–	–	25
b	–	–	10	5	–	–
c	–	–	–	12	–	–
d	–	9	–	–	10	20
e	–	–	17	–	–	–
f	–	–	–	–	–	–

Таблица графа G_1.

Рис. 3: Пример нагруженного графа.

Определение 3. *Путь в ориентированном графе — это последовательность вершин, в которой из каждой вершины идёт ребро в следующую. Путь в неориентированном графе — это последовательность вершин, в которой любые две соседние вершины соединены ребром.*

Примерами путей в графе G_1 являются последовательности $p_1 = (a, b, c, d, f)$, $p_2 = (b, d, b, d, b)$, $p_3 = (a, b, d, e, c, d, b)$. Последовательность $p_4 = (a, f, d, e)$ не является путём, так как из f в d не идёт никакое ребро. Однако в графе G_3 последовательность p_4 является путём, так как любое ребро можно проходить в обоих направлениях.

Определение 4. *Путь в графе называется циклом, если он начинается и заканчивается в одной и той же вершине.*

Из рассмотренных путей p_2 является циклом, так как он возвращается в вершину b, а остальные пути циклами не являются.

Предположим, что задан ориентированный граф G без циклов, в котором выделены две вершины x и y. Нетрудно видеть, что тогда существует лишь конечное число различных путей из x в y (в частности, может оказаться, что таких путей вообще нет). Обозначим число различных путей из x в y через $p(x, y)$. Иногда может оказаться полезной следующая простая теорема.

Теорема 1. *Пусть G — ориентированный граф без циклов, x, y и z — три вершины этого графа. Тогда число путей из x в y, проходящих через z, равно $p(x, z)p(z, y)$. В частности, если все пути из x в y проходят через z, то $p(x, y) = p(x, z)p(z, y)$.*

В общем случае число различных путей можно определить с помощью следующего алгоритма.

Алгоритм для нахождения числа путей.
Вход: ориентированный граф без циклов G, вершины x и y.
Выход: число различных путей из x в y в графе G.
1. Положить для каждой вершины $v \neq x$ графа G $p(x, v) = 0$.
2. Положить $p(x, x) = 1$.
3. Найти в графе G вершину v такую, что для любого её непосредственного предшественника u выполняется $p(x, u) \neq 0$.

4. Если такой вершины нет, то выдать $p(x, y)$ в качестве результата и остановиться.
5. Пусть такая вершина v есть. Пусть $u_1, u_2, \ldots, u_k$ — все её непосредственные предшественники.
6. Положить $p(x, v) = p(x, u_1) + p(x, u_2) + \cdots + p(x, u_k)$.
7. Вернуться к шагу 3.

Определение 5. *Пусть G — ориентированный нагруженный граф, p — путь в графе G. Длиной пути p (весом, стоимостью) называется сумма длин всех рёбер этого пути. Если граф G не является нагруженным, то длина пути p — это число рёбер на пути.*

Рассмотрим граф G_1 с рис. 3 и пути $p_1 = (a, b, c, d, f)$, $p_2 = (a, b, d, e, c, d, b)$, $p_3 = (b, d, b, d, b)$. Тогда длина пути p_1 равна $23+10+12+20 = 65$, длина пути p_2 равна $23+5+10+17+12+9 = 76$, а длина пути p_3 равна $5+9+5+9 = 28$. Теперь расмотрим тот же граф без нагрузки (см. рис.1). Длины путей p_1, p_2, p_3 равны 3, 6, 4 соответственно.

Определение 6. *Путь p между вершинами x и y графа G называется кратчайшим, если он имеет наименьшую длину среди всех путей из x в y.*

Легко видеть, что в случае графов с положительными длинами рёбер понятие кратчайшего пути определено корректно.

Теорема 2. *Пусть длины всех рёбер графа G положительны. Тогда если из вершины x есть путь в вершину y, то есть и кратчайший путь из x в y, причём он не содержит циклов.*

Примеры задач.

Задача 1. На рисунке справа схема дорог Н-ского района изображена в виде графа; в таблице слева содержатся сведения о протяжённости каждой из этих дорог (в километрах).

	П1	П2	П3	П4	П5	П6
П1		10			8	5
П2	10			20	12	
П3				4		
П4		20	4		15	
П5	8	12		15		7
П6	5				7	

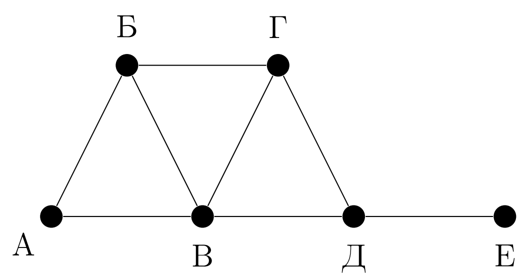


Рис. 4: Граф дорог Н-ского района.

Так как таблицу и схему рисовали независимо друг от друга, то нумерация населённых пунктов в таблице никак не связана с буквенными обозначениями на графе. Определите, какова протяжённость дороги из пункта Б в пункт В. В ответе запишите целое число — так, как оно указано в таблице.

Решение. Из рисунка видно, что у вершины Е есть ровно один сосед — вершина Д, причём никакая другая вершина не обладает таким свойством. Найдём в таблице вершину с единственным соседом. Это вершина П3, а её сосед — П4. Следовательно, П3 = Е, П4 = Д. Точно так же мы замечаем, что только В и П5 имеют по четыре соседа. Следовательно, П5 = В. У вершины Д есть ещё один сосед, помимо В и Е, — это вершина Г. Третьим соседом вершины П4 является П2, значит, П2 = Г. Наконец, мы заметим, что только А и П6 имеют по два соседа, поэтому П6 = А. Остаётся только одна нерассмотренная вершина, следовательно, П1 = Б.

Итак, мы доказали, что П1 = Б, П5 = В. Следовательно, длина дороги из Б в В равна 8.

Ответ: 8.

Задача 2. Между населёнными пунктами A, B, C, D, E, F, G построены дороги, протяжённость которых приведена в таблице. Отсутствие числа в таблице означает, что прямой дороги между пунктами нет.

	A	B	C	D	E	F	G
A		5		12			25
B	5			8			
C				2	4	5	10
D	12	8	2				
E			4				5
F			5				5
G	25		10		5	5	

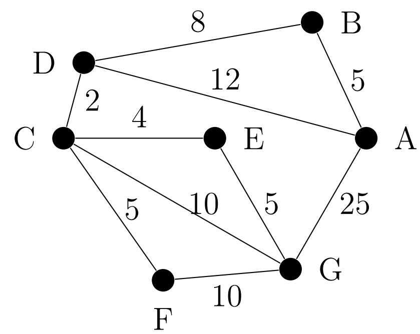


Рис. 5: Дороги между населёнными пунктами.

Определите длину кратчайшего пути между пунктами A и G (при условии, что передвигаться можно только по построенным дорогам).

Решение. Для наглядности изобразим граф в виде рисунка (см. рис. 5). Сразу видно, что есть путь из A в G из одного ребра длины 25. Поищем более короткие пути. Поскольку длины всех рёбер положительны, то кратчайший путь не может содержать циклов. Кратчайший путь из A в B имеет длину 5 (это одно ребро), так как любое другое выходящее из A ребро имеет большую длину. Кратчайший путь из A в D имеет длину 12 (тоже одно ребро), так как единственный альтернативный путь $A \to B \to D$ имеет длину 13. Поэтому кратчайший путь из A в C имеет длину 14 ($A \to D \to C$). Из C в G ведут три пути (без циклов): путь $C \to E \to G$ длины 9, путь $C \to G$ длины 10 и путь $C \to F \to G$ длины 15. Кратчайший из них имеет длину 9. Поэтому длина кратчайшего «обходного» пути из A в G равна $14 + 9 = 23 < 25$. Значит, кратчайший путь из A в G имеет длину 23.

Ответ: 23.

Задача 3. На рисунке представлена схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З, И, К, Л, М. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город М, проходящих через город В?

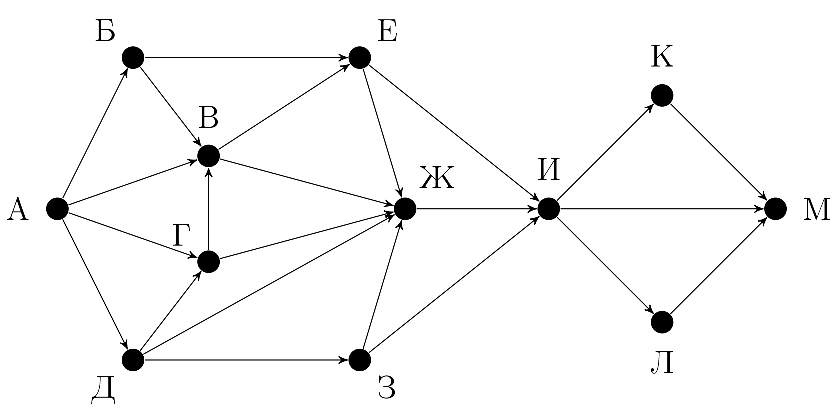


Рис. 6: Схема дорог.

Решение. Из рисунка видно, что любой путь из А в М проходит через И. По условию задачи

мы должны искать только те пути, которые проходят через В. Обозначим число путей через N. По теореме 1 $N = p(\text{А}, \text{В})p(\text{В}, \text{И})p(\text{И}, \text{М})$. Из рисунка видно, что имеется четыре пути из А в В (А → Б → В, А → В, А → Г → В, А → Д → Г → В), три пути из В в И (В → Е → И, В → Ж → И, В → Е → Ж → И) и три пути из И в М (И → К → М, И → М, И → Л → М). Получаем $N = 4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$.
Ответ: 36.

Задача 4. Сколько существует различных путей из города А в город И для схемы дорог из предыдущей задачи?
Решение. Из рисунка видно, что не существует такой вершины v, через которую проходил бы любой путь из А в И, поэтому теорема 1 не поможет. Воспользуемся общим алгоритмом. Оформим решение в виде таблицы. В первом столбце будем писать номер итерации, во втором столбце — выбранную на этой итерации вершину, а в остальных двенадцати столбцах — число путей из А в вершину, которой помечен столбец. Чтобы не загромождать таблицу, не будем писать нули, оставив вместо них пустые клетки. (Таблица использована для краткой записи всех шагов алгоритма. При решении задач можно просто подписывать число путей рядом с каждой вершиной.)

№	v	А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З	И	К	Л	М
0	–	1											
1	Б	1	1										
2	Д	1	1			1							
3	Г	1	1		2	1							
4	З	1	1		2	1			1				
5	В	1	1	4	2	1			1				
6	Е	1	1	4	2	1	5		1				
7	Ж	1	1	4	2	1	5	12	1				
8	И	1	1	4	2	1	5	12	1	18			
9	К	1	1	4	2	1	5	12	1	18	18		
10	Л	1	1	4	2	1	5	12	1	18	18	18	
11	М	1	1	4	2	1	5	12	1	18	18	18	54

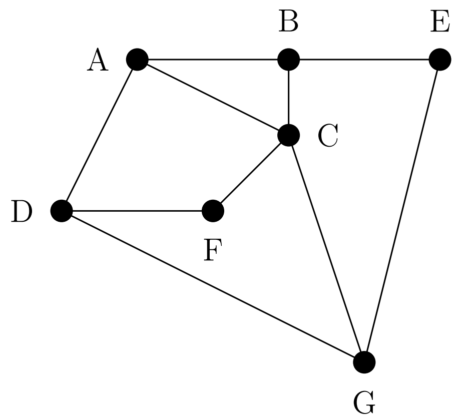
Рис. 7: Работа алгоритма для поиска числа путей.

Прокомментируем несколько итераций. На итерации 1 есть две вершины, все непосредственные предшественники которых уже отмечены. Это вершины Б и Д с предшественником А. Мы выбираем вершину Б и вычисляем $p(\text{А}, \text{Б}) = 1$ (можно было выбрать и Д). На итерации 4 уже помечены вершины А, Б, Д и Г. Поэтому мы можем выбрать любую из вершин В, З. Мы выбрали З и вычислили $p(\text{А}, \text{З}) = 1$. На итерации 5 можно выбрать только одну вершину — В. Её непосредственные предшественники — А, Б и Г. Складывая значения, приписанные этим трём вершинам, получаем $p(\text{А}, \text{В}) = 1 + 1 + 2 = 4$. Остальные итерации срабатывают аналогично.

Заметим, что мы могли и не вычислять число путей для *всех* вершин. Как только мы узнали, что $p(\text{А}, \text{И}) = 18$ (это произошло в итерации 8), можно было остановиться и не рассматривать вершины К, Л, М. Итак, $p(\text{А}, \text{И}) = 18$.
Ответ: 18.

Упражнения.

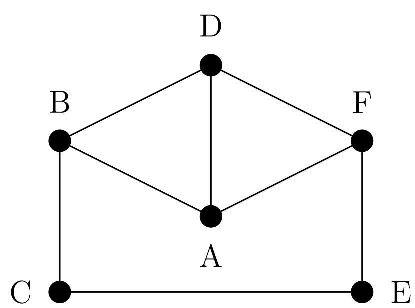
Упражнение 1. Неориентированный граф задан в виде рисунка и в виде таблицы. Установите соответствие между вершинами этих представлений графа.



	1	2	3	4	5	6	7
1					1	1	
2				1	1		1
3				1			1
4		1	1		1	1	
5	1	1		1			
6	1			1			1
7		1	1			1	

Рис. 8: Граф из упражнения 1.

Упражнение 2. Нагруженный неориентированный граф задан в виде рисунка и в виде таблицы. Чему равна длина ребра, соединяющего вершины B и D?



	1	2	3	4	5	6
1			5	5	7	
2					12	7
3	5			9		5
4	5		9			5
5	7	12				
6		7	5	5		

Рис. 9: Граф из упражнения 2.

Упражнение 3. Неориентированный граф задан таблицей. Найдите длину кратчайшего пути из вершины A в вершину D.

	A	B	C	D	E	F	G
A		10	12				
B	10		7				1
C	12	7		9	1		
D			9			4	
E			1			3	2
F				4	3		7
G		1			2	7	

Рис. 10: Граф из упражнения 3.

Упражнение 4. Ориентированный граф задан таблицей. Найдите длины кратчайших путей из B в E и из E в B.

	A	B	C	D	E	F	G
A			1	5			3
B	2				10		
C		1			8	6	3
D							4
E	6						3
F					4		
G	2					2	

Рис. 11: Граф из упражнения 4.

Упражнение 5. Ориентированный граф задан рисунком.
а) Сколько существует различных путей из A в N?
б) Сколько существует путей из A в N, проходящих через E, но не проходящих через L?
в) Сколько существует путей из A в N, проходящих и через F, и через K?
г) Какова длина самого длинного пути из A в N? Сколько существует таких путей?

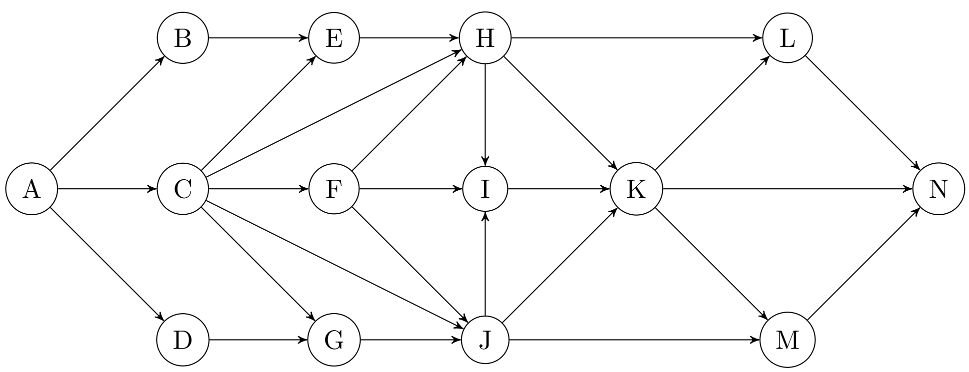


Рис. 12: Граф из упражнения 5.

Указания к упражнениям.

Упражнение 1. Используйте метод из решения задачи 1. Может оказаться, что на некотором шаге не удаётся найти две соответствующие друг другу вершины. Тогда нужно попытаться использовать дополнительную информацию. Например, если оказалось, что вершины А, Б совпадают с вершинами П1, П2 (без учёта порядка), а вершины А, В — с вершинами П2, П3 (тоже без учёта порядка), то А = П2, так как только эти две вершины встречаются по два раза.
Ответ: A = 2, B = 5, C = 4, D = 7, E = 1, F = 3, G = 6.

Упражнение 2. В задаче не требуется установить соответствие между вершинами. Нужно лишь найти длину ребра, соединяющего B и D. Само ребро не обязательно определяется однозначно.
Ответ: 5.

Упражнение 3. Используйте тот же метод, что и в задаче 2: последовательно вычислять длины кратчайших путей из A до других вершин.
Ответ: 20.

Упражнение 4. Используйте тот же метод, что и в задаче 2. Единственное отличие состоит в том, что теперь граф ориентированный, поэтому по рёбрам можно идти лишь в одну сторону. Следовательно, длины кратчайших путей из B в E и из E в B могут быть разными.
Ответ: из B в E 10, из E в B 7.

Упражнение 5. а) Используйте алгоритм.
б) Если пути не проходят через L, то L с входящими в неё и выходящими из неё рёбрами можно удалить из графа. После этого нужно решить задачу для оставшегося графа.
в) Используйте алгоритм и теорему об умножении.
г) Используйте ту же идею, что и в алгоритме для поиска числа всех путей. Нужно запоминать только те пути, длина которых максимальна.
Ответ: а) 59; б) 8; в) 15; г) 12 путей длины 7.