Методические указания
для выполнения расчетно-графической работы по теме
"Методы моделирования стохастических систем"

Замечание 1: Если случайная величина (с.в.) ξ имеет **равномерное распределение** на отрезке , то с.в. $\eta = a + (b - a)\xi$ имеет равномерное распределение на отрезке $[a, b]$.

Замечание 2: С.в. $\xi \in N(0,1)$, где символ $N(0,1)$ обозначает, что с.в. ξ имеет **стандартное нормальное распределение**, может быть удовлетворительно представлена случайной величиной

$$\eta = \frac{\eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_m - m/2}{\sqrt{m/12}} \ ,$$

где $\eta_1, \ldots, \eta_m$ – независимые одинаково распределенные случайные величины (н.о.р.с.в.). Причем с.в. η_1 имеет равномерное распределение на отрезке $[0,1]$. Для хорошей аппроксимации рекомендуется брать $m \geq 12$.

Замечание 3: Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – н.о.р.с.в. и $\xi_1 \in N(0,1)$. Тогда с.в. $\chi^2_n := \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2$ имеет χ^2 (хи - квадрат) – **распределение с n степенями свободы**.

Замечание 4: Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n, \xi_{n+1}$ – н.о.р.с.в. и $\xi_1 \in N(0,1)$. Тогда с.в.

$$t_n := \frac{\xi_{n+1}}{\sqrt{1/n \cdot \chi^2_n}} = \frac{\xi_{n+1}}{\sqrt{1/n \cdot (\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2)}}$$

имеет **распределение Стьюдента с n степенями свободы**.

Замечание 5: Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n, \xi_{n+1}, \ldots, \xi_{n+m}$ – н.о.р.с.в. и $\xi_1 \in N(0,1)$. Тогда с.в.

$$F_{n,m} := \frac{1/n \cdot (\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2)}{1/m \cdot (\xi_{n+1}^2 + \ldots + \xi_{n+m}^2)} \ .$$

имеет **распределение Фишера с n и m степенями свободы**.

Замечание 6: Пусть $F_\xi(x) = F(x) = P(\xi < x)$ - есть непрерывная и строго возрастающая функция распределения с.в. ξ. Тогда с.в. $\eta = F(\xi)$ имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$. Отсюда следует, что, если с.в. η имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$, а функция $y = F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, x > 0$, есть **функция распределения показательного закона с параметром** λ, то с.в. $\xi = F^{-1}(\eta)$ имеет **показательное распределение с параметром** λ. Здесь $x = F^{-1}(y) = -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln(1 - y)$ – есть обратная функция для $F(x)$.

Замечание 7: Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – н.о.р.с.в. и ξ_1 имеет показательное распределение с параметром $\lambda > 0$. Плотность такого распределения имеет вид:

$$\rho_\xi(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & , \quad x > 0, \\ 0 & , \quad x \leq 0, \end{cases}$$

Тогда с.в. $\eta = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ – имеет гамма распределение с параметрами $\alpha = n, \beta = \lambda$. В общем случае говорят, что с.в. ξ имеет **гамма-распределение с параметрами** $\alpha > 0$ **и** $\beta > 0$, если она имеет плотность распределения следующего вида:

$$\rho_\xi(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} e^{-\beta x} & , \quad x > 0, \\ 0 & , \quad x \leq 0, \end{cases}$$

где $\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ – **гамма функция Эйлера**.

Гамма функция обладает следующими свойствами:

1. $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \cdot \Gamma(\alpha)$;
2. $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}, \Gamma(1) = 1$;
3. $\Gamma(n + 1) = n!$, где n – натуральное.

В дальнейшем для обозначения гамма распределения будем использовать символ $\Gamma(\alpha, \beta)$.

Показательное распределение является частным случаем гамма распределения с параметрами $\alpha = 1, \beta = \lambda$!!!

Замечание 7: Пусть n – натуральное число, с.в. $\xi \in \Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}$, т.е. имеет гамма распределение с параметрами $\alpha = \frac{n}{2}$ и $\beta = \frac{1}{2}$. Тогда с.в. ξ имеет χ^2-распределение с n степенями свободы.

Т.о. χ^2-распределение также является частным случаем гамма распределения!!!

Замечание 8: Пусть мы рассматриваем некоторую с.в. ξ. Пусть независимо и в одинаковых условиях мы произвели k измерений этой случайной величины и получили с.в. $x_1, \ldots, x_k$. Рассмотрим новую последовательность н.о.р.с.в. $\xi_1, \ldots, \xi_k$, таких, что

$$\xi_i = \begin{cases} 1 & , \quad x_i < z, \\ 0 & , \quad x_i \geq z, \end{cases}$$

где z есть некоторое фиксированное число. Обозначим через $S_k(z) = \xi_1 + \ldots + \xi_k$ – число измерений с.в. ξ, меньших z.

Позднее будет показано, что с.в. $S_k(z)/k \to F_\xi(z) = P(\xi < z)$ при $k \to \infty$ (т.е., в некотором смысле сходится к функции распределения).

Тогда в качестве оценки значения функции $F_\xi(z) = P(\xi < z)$ в точке z можно использовать величину $s_k(z)/k$, вычисленную по наблюдениям $x_1, \ldots, x_k$.

Замечание 9: Пусть с.в. ξ имеет абсолютно непрерывное распределение. **Квантилью порядка** p ($p \in [0, 1]$) с.в. ξ называется число $x_p \in R^1$: $P(\xi < x_p) = F_\xi(x_p) = p$.

Замечание 10: Пусть необходимо вычислить значение интеграла $\int_a^b f(x)dx$. . Введем в рассмотрение с.в. ξ, имеющую равномерное распределение на $[a, b]$, и с.в. $\eta = f(\xi)$.

Вычислим математическое ожидание η:

$$M(\eta) = M[f(\xi)] = \int_a^b f(x) \cdot \rho_\xi(x)dx = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)dx \ .$$

Таким образом, получаем, что

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a) \cdot M[f(\xi)] \ ,$$

где $M[f(\xi)]$ есть математическое ожидание с.в. $f(\xi)$.

Пусть $x_1, \ldots, x_n$ есть независимые измерения с.в. ξ, произведенные в одинаковых условиях. Тогда величины $f(x_1), \ldots, f(x_n)$ можно рассматривать как аналогичные измерения с.в. $\eta = f(\xi)$.

Позднее будет показано (см. тему "Закон больших чисел"), что величина $(\sum_{i=1}^n f(x_i))/n$ является "хорошей"(в некотором смысле) оценкой (аппроксимацией) $M[f(\xi)]$. Отсюда следует, что

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \ .$$

Замечание 11: Пусть необходимо найти площадь некоторой области D.

Для этого:

1. Строим прямоугольник со сторонами $[a, b]$ и c, d, содержащий область D.

2. Рассмотрим независимые случайные величины ξ и η, где с.в. ξ имеет равномерное распределение на отрезке $[a, b]$; с.в. η имеет равномерное распределение на отрезке $[c, d]$. Введем с.в.

$$\varphi = \begin{cases} 1 \quad , \quad (\xi, \eta) \in D, \\ 0 \quad , \quad (\xi, \eta) \notin D. \end{cases}$$

Вычислим математическое ожидание с.в. φ:

$$M\varphi = 1 \cdot P((\xi, \eta) \in D) + 0 \cdot P((\xi, \eta) \notin D) = P((\xi, \eta) \in D) = \frac{S_D}{S_{abcd}} \ ,$$

где S_D, S_{abcd} – площади области D и прямоугольника $abcd$, соответственно. При вычислении вероятности мы воспользовались геометрическим определением вероятности, поскольку случайный вектор имеет равномерное распределение в области D. Следовательно, $S_D = S_{abcd} \cdot M\varphi$.

Пусть $(x_1, y_1), \dots (x_n, y_n)$ – полученные ("наблюденные") значения случайного вектора (ξ, η). Таким образом, мы имеем n измерений с.в. φ: $z_1, \dots, z_n$, где

$$z_i = \begin{cases} 1 \quad , \quad (x_i, y_i) \in D, \\ 0 \quad , \quad (x_i, y_i) \notin D, \end{cases}$$

$i = 1, \dots, n$. Отсюда получаем, что

$$S_D \approx S_{abcd} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n}}{n} \ .$$