§11 СЛУЧАЙНЫЙ ВЕКТОР И ЕГО РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Определение1. Случайным вектором называется набор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$, заданных на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Если $\mathcal{B}_n$ — борелевская σ–алгебра в R^n, то можно доказать, что $\forall B \in \mathcal{B}_n$

$$A = \xi^{-1}(B) = \{\omega : \ \xi(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$$

т.е. отображение $\xi : \Omega \to R^n$ является $(\mathcal{A}, \mathcal{B}_n)$ измеримым.

Определение 2. Распределением случайного вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ называется действительная функция P_ξ, заданная на σ–алгебре $\mathcal{B}_n$ борелевских подмножеств R^n по следующему правилу:

$$\forall B \in \mathcal{B}_n \quad P_\xi(B) = P\{\xi \in B\}. \tag{1}$$

Замечание 1. Как и для случая одномерных случайных величин необходимо отметить, что функции P_ξ и P заданы на разных σ–алгебрах; первая — на $\mathcal{B}_n$, вторая на $\mathcal{A}$.

Замечание 2. Задание случайного вектора в виде отображения $\xi : \Omega \to R^n$ является удобной математической моделью. В реальном случайном эксперименте мы можем объективно определить только значения, которые может принимать случайный вектор ξ и их вероятности, т.е. распределение P_ξ.

Распределение P_ξ случайного вектора ξ является удобной характеристикой при теоретическом исследовании, но довольно сложной в практическом применении. Поэтому в реальных задачах используют другие способы задания распределения ξ.

Определение 3. Функцией распределения случайного вектора называется функция F_ξ, заданная на R^n по правилу

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n \quad F_\xi(x) = P\{\xi_1 < x_1, \ldots, \xi_n < x_n\}. \tag{2}$$

Замечание 3. По функции распределения F_ξ распределение P_ξ случайного вектора

восстанавливается однозначно (см. задачу 11.4).

Пример 1. Точка 0 случайным образом выбирается в единичном квадрате, $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ — координаты точки 0. Найти функцию распределения $F_\xi(x)$ такого случайного вектора.

Решение. По смыслу задачи координаты вектора принимают свои значения в отрезке $[0; 1]$. Поэтому если $x_1 \le 0$,или $x_2 \le 0$, то $F_\xi(x_1, x_2) = P\{\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2\} = P(\emptyset) = 0$. Аналогично, если $x_1 > 1$ и $x_2 > 1$, то $F_\xi(x_1, x_2) = P(\Omega) = 1$. Далее целесообразно рассмотреть отдельно три случая.

а) $0 < x_1 \le 1$, $x_2 > 1$,

$F_\xi(x_1, x_2) = P\{\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2\} = P\{\xi_1 < x_1\} = x_1$.

Здесь мы использовали тот факт, что случайный выбор точки означает, что она выбирается "равновероятно"внутри квадрата, т.е. мы имеем геометрическое определение вероятности.

b) $x_1 > 1$, $0 < x_2 \le 1$. Аналогично предыдущему имеем

$F_\xi(x_1, x_2) = x_2$.

c) $0 < x_1 \le 1$, $0 < x_2 \le 1$.

$F_\xi(x_1, x_2) = P\{\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2\} = x_1 \cdot x_2$.

Собирая все вместе, окончательно получаем

$$F_\xi(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, \quad x_1 \le 0 \text{ или } x_2 \le 0; \\ x_1 \cdot x_2, \quad 0 < x_1 \le 1,\ 0 < x_2 \le 1; \\ x_1, \quad 0 < x_1 \le 1,\ x_2 > 1; \\ x_2, \quad x_1 > 1,\ 0 < x_2 \le 1; \\ 1, \quad x_1 > 1 \text{ и } x_2 > 1. \end{cases}$$

Как и для распределений случайных величин, в классе всех распределений случайных векторов выделяют три специальных типа распределений.

Определение 4. Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ (соответственно его распределение P_ξ) называется дискретным, если существует конечное или счетное множество $X \subset R^n$:

$$P\{\xi \in X\} = 1.$$

Замечание 4. Множество X называется множеством значений случайного вектора ξ.

Замечание 5. Очевидно, что если ξ — дискретный случайный вектор, то каждая его координата ξ_k есть дискретная случайная величина. Обозначим через $X^{(k)} = \{x_1^{(k)}, \ldots, x_i^{(k)}, \ldots\}$ множество значений случайной величины ξ_k, а через X множество

$$X = X^{(1)} \times \ldots \times X^{(n)} = \{x = (x_{i_1}^{(1)}, \ldots, x_{i_n}^{(n)}):\ x_{i_k}^{(k)} \in X^{(k)},\ k = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Нетрудно доказать, что для такого X мы имеем $P\{\xi \in X\} = 1$. Как правило, именно это X и выбирают в качестве множества значений. Правда, в этом случае могут существовать такие $x \in X$, что $P\{\xi = x\} = 0$.

Определение 5. Пара $(X, \{P_{i_1,\ldots,i_n}\})$, где X — множество значений случайного вектора, а

$$P_{i_1,\ldots,i_n} = P\{\xi_1 = x_{i_1}^{(1)}, \ldots, \xi_n = x_{i_n}^{(n)}\}, \tag{3}$$

называется распределением дискретного случайного вектора.

Замечание 6. Ниже будет показано, что пара

$(X, \{P_{i_1,\ldots,i_n}\})$ однозначно определяет распределение P_ξ дискретного случайного вектора ξ (см. задачу 11.5). Поэтому в данном случае, называя одним и тем же оловом два разных объекта, мы не приходим к противоречию.

Определение 6. Распределение P_ξ случайного вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ называется абсолютно непрерывным, если существует такая измеримая интегрируемая по мере Лебега функция $\rho_\xi(x)$ заданная на R^n, что $\forall B \in \mathcal{B}_n$

$$P_\xi(B) = P\{\xi = B\} = \int\limits_B \rho_\xi(x)\,dx. \tag{4}$$

Замечание 7. $\rho_\xi(x)$ называется плотностью распределения случайного вектора ξ.

Свойства плотности $\rho_\xi(x)$ приведены ниже (см. задачу 11.7). В частности, по $\rho_\xi(x)$ однозначно восстанавливается распределение P_ξ. В силу этого обычно говорят, что распределение случайного вектора ξ задано плотностью $\rho_\xi(x)$.

Определение сингулярного распределения дается дословно так же, как и в одномерном случае, но для случайных векторов сингулярные распределения уже не являются редким исключением и появляются в виде вырожденных распределений.

Определение 7. Распределение P_ξ случайного вектора ξ будем называть вырожденным, если существует гиперповерхность $X \subset R^n$ размерности $m < n$, такая, что

$$P_\xi(X) = P\{\xi \in X\} = 1.$$

Замечание 8. Такое определение вырожденности не является общепринятым. Чаще распределение называют вырожденным, если X состоит из одной точки. Но в работах прикладного характера такое определение используется довольно часто.

Замечание 9. В случае вырожденного распределения случайного вектора ξ обычно рассматривают его проекцию на X, где в новых координатах рассматривают новый случайный вектор η, распределение которого уже может быть абсолютно непрерывным.

Замечание 10. Как и в одномерном случае, можно определить смесь распределений и доказать теорему Лебега о разложении распределения на дискретную, абсолютно-непрерывную и сингулярные компоненты.

Приведем примеры наиболее часто используемых многомерных распределений.

Пример 2. Полиномиальное распределение с параметрами n, $p_1,\ldots,$ p_r.

Пусть производится n независимых испытаний, каждое из которых может закончиться одним из r взаимоисключающих событий $A_1,\ldots,$ A_r, т.е. $A_i \cap A_j = \emptyset$, $A_1 + \ldots + A_r = \omega$ и $P(A_i) = p_i$, $i = 1, \ldots, r$. Определим следующие случайные величины:

ξ_1 — число появлений события A_1 в n испытаниях,

$\ldots$

ξ_r — число появлений события A_r в n испытаниях.

Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, очевидно, имеет множество значений

$$X = \{m = (m_1, \ldots, m_r): \; m_i \in Z^+, \; m_1 + \ldots + m_r = n\}.$$

Как это уже отмечалось в §7 , мы имеем

$$P\{\xi = m\} = \frac{n!}{m_1! \cdot \ldots \cdot m_r!} p_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{m_r}. \qquad (5)$$

Замечание 11. Если $r = r$, $p_1 = p$, то получаем биномиальное распределение с параметрами n и p.

Пример 3. Многомерное нормальное распределение с параметрами m и Σ.

Пусть случайный вектор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ имеет абсолютно непрерывное распределение, плотность $\rho_\xi(x)$ которого задана формулой

$$\rho_\xi(x) = (2\pi)^{-n/2}|A|^{1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_i - m_i)(x_j - m_j)\right\}, \qquad (6)$$

где $m = (m_1, \ldots, m_n) \in R^n$; $A = \sum^{-1}$ — симметричная, положительно определенная $n \times n$ матрица; $|A|$ — определитель матрицы A.

Замечание 12. Распределение вероятностей с плотностью, заданной по формуле (6), называется многомерным нормальным распределением.

Замечание 13. Вероятностный смысл параметров a и $\sum$ будет выяснен позднее (см. §13).

Пример 4. Говорят, что случайный вектор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ имеет равномерное распределение в области $\mathcal{D}$, где $\mathcal{D}$ — ограниченное борелевское подмножество из R^n, если ξ имеет абсолютно непрерывное распределение с плотностью

$$\rho_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{L(\mathcal{D})}, & x \in \mathcal{D}; \\ 0, & x \notin \mathcal{D}. \end{cases}$$

где $L(\mathcal{D})$ — мера Лебега множества $\mathcal{D}$.

Решим теперь несколько типичных задач, связанных с распределением случайного вектора.

Пример 5. $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ — двумерный случайный вектор, распределение которого задано следующей таблицей:

ξ_1 ξ_2	-1	0	1	2
-1	0.05	0.02	0.1	0.15
0	0.12	0.08	0.13	0.04
1	0.01	0.1	0.15	0.05

Чтобы пояснить, что за цифры составляют эту таблицу, достаточно привести пример: $P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = 1\} = 0.13$

Найти:

1) распределения случайных величин ξ_1, и ξ_2;

2) вычислить $P\{\xi_1 - \xi_2 = 1\}$.

Решение. Так как ξ — дискретный случайный вектор, то и ξ_1 и ξ_2 будут дискретными случайными величинами. Чтобы задать распределение дискретной случайной величины, достаточно задать множество ее значений и вероятности появления этих значений. Для случайной величины ξ_1 множество ее возможных значений $X^{(1)} = \{-1; 0; 1\}$. В силу одного из свойств распределения дискретного случайного вектора (см. задачу 11.5)

$$P\{\xi_1 = x_{i_1}^{(1)}\} = \sum_{i_2} P\{\xi_1 = x_{i_1}^{(1)},\ \xi_2 = x_{i_2}^{(2)}\}.$$

Отсюда получаем

$P\{\xi_1 = -1\} = P\{\xi_1 = -1;\ \xi_2 = -1\} + P\{\xi_1 = -1;\ \xi_2 = 0\} + P\{\xi_1 = -1;\ \xi_2 = 1\} + P\{\xi_1 = -1;\ \xi_2 = 2\} = 0.05 + 0.02 + 0.1 + 0.15 = 0.32$,

$P\{\xi_1 = 0\} = 0.12 + 0.8 + 0.13 + 0.04 = 0.37$,

$P\{\xi_1 = 1\} = 0.01 + 0.1 + 0.15 + 0.05 = 0.31$.

Таким образом, распределение случайной величины ξ_1 может быть задано таблицей:

$x_{i_1}^{(1)}$	-1	0	1
P_{i_1}	0.32	0.37	0.37

Для ξ_2 задача решается аналогично.

Заметим, что в случае небольшой таблицы, задающей распределение вероятностей случайного вектора ξ, вычисление вероятности любого события, связанного с этим случайным вектором ξ сводится к суммированию вероятностей, стоящих в тех клетках таблицы, для которых появление соответствующей пары значений $(x_{i_1}^{(1)}, x_{i_2}^{(2)})$ приводит к осуществлению этого события. Например, для вероятности $P\{\xi_1 = -1\}$ это приводит к суммированию всех вероятностей из первой строчки таблицы. А для события $\{\xi_1 - \xi_2 = 1\}$ мы имеем

$$P\{\xi_1 - \xi_2 = 1\} = P\{\xi_1 = 0,\ \xi_2 = -1\} = P\{\xi_1 = 1,\ \xi_2 = 0\} = 0.12 + 0.1 = 0.22.$$

Пример 6. Симметричную монету независимо

подбрасывают два раза, ε_1 (ε_2) — число выпавших гербов при первом (втором)подбрасывании. Положим $\delta_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, $\delta_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$. Найти распределения случайных векторов $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ и $\delta = (\delta_1, \delta_2)$.

Решение. Так как для случайного вектора ε задача сравнительно проста, выпишем только ответ.

ε_2 ε_1	0	1
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Найдем множества значений случайных величин δ_1 и δ_2. Для δ_1, получаем $X^{(1)} = \{0, 1, 2\}$ — как множество всевозможных сумм значений случайных величин ε_1 и ε_2. Для δ_2 аналогично получаем $X^{(2)} = \{-1, 0, 1\}$. Множество X значений случайного вектора δ может быть представлено в виде $X = X^{(1)} \times X^{(2)}$. Осталось вычислить вероятность появления каждого значения из этого множества.

$$P\{\delta_1 = y_{i_1}^{(1)},\ \delta_2 = y_{i_2}^{(2)} = P\{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = y_{i_1}^{(1)},\ \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = y_{i_2}^{(2)}\} =$$

$$= P\{\varepsilon_1 = 1/2(y_{i_1}^{(1)} + y_{i_2}^{(2)}),\ \varepsilon_2 = 1/2(y_{i_1}^{(1)} - y_{i_2}^{(2)})\}$$

Далее нужно воспользоваться таблицей для распределения случайного вектора ε. Окончательно получаем:

δ_2 δ_1	0	1	2
-1	0	$\frac{1}{4}$	0
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{4}$	0

Пример 7. Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ имеет равномерное распределение в квадрате с вершинами (-1,0), (0,1), (1,0), (0,-1). Найти:

1) плотности распределения случайных величин ξ_1, ξ_2;

2) вероятность $P\{\xi_1 + \xi_2 < 0\}$.

Так как $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ имеет равномерное распределение в квадрате $\mathcal{D}$, площадь которого $L(\mathcal{D}) = 2$, то

$$\rho_\xi(x) = \begin{cases} 1/2, & x \in \mathcal{D}, \\ 0, & x \notin \mathcal{D} \end{cases} \quad (x = (x_1, x_2)).$$

Как доказано ниже (см. задачу 11.12),

$$\rho_{\xi_1}(x_1) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho_\xi(x_1, x_2)\, dx_2.$$

Так как $\rho_\xi(x_1, x_2) = 0$, если $|x_1| > 1$, то $\rho_{\xi_1}(x_1) = 0$ при $|x_1| > 1$. Пусть $|x_1| \le 1$. Тогда

$$\rho_{\xi_1}(x_1) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho_\xi(x_1, x_2)\, dx_2 = \int\limits_{-1+|x_1|}^{1-|x_1|} \frac{1}{2}\, dx_2 = 1 - |x_1|.$$

Окончательно получаем

$$\rho_{\xi_1}(x_1) = \begin{cases} 0, & |x_1| > 1, \\ 1 - |x_1|, & , |x_1| \le 1. \end{cases}$$

В силу симметрии распределение ξ_2 такое же. По определению плотности $\rho_\xi(x)$ имеем

$$P\{\xi_1 + \xi_2 < 0\} = P\{(\xi_1, \xi_2) \in \mathcal{D}_1\} = \int\int\limits_{\mathcal{D}_1} \rho_\xi(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = \frac{1}{2} L(\mathcal{D}_1) = \frac{1}{2}.$$

Определение 8. Случайные величины ξ_1, ξ_2,..., ξ_n называются независимыми если $\forall\ B_1,\ B_2, \ldots,\ B_n \in \mathcal{B}_1$

$$P\{\xi_1 \in B_1,\ \xi_2 \in B_2, \ldots, \xi_n \in B_n\} = P\{\xi_i \in B_i\} \ldots P\{\xi_n \in B_n\}. \qquad (8)$$

Замечание 14. Если случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ имеет ф.р. $F_\xi(x)$, $x \in R^n$, то условие независимости его компонент записывается в виде

$$F_\xi(x_1, \ldots, x_n) = F_{\xi_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot F_{\xi_n}(x_n) \tag{9}$$

(см. задачу 11.9). В случаях дискретного и абсолютно непрерывного распределений имеем соответственно

$$P\{\xi_1 = x_{i_1}^{(1)}, \ldots, \xi_n = x_{i_n}^{(n)}\} = P\{\xi_1 = x_{i_1}^{(1)}\} \cdot \ldots \cdot P\{\xi_n = x_{i_n}^{(n)}\} \tag{10}$$

и

$$\rho_\xi(x_1, \ldots, x_n) = \rho_{\xi_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot \rho_{\xi_n}(x_n) \tag{11}$$

(см. задачи 11.10 и 11.11).

Пример 8. Из единичного квадрата, стороны которого параллельны осям координат, случайным образом выбирается точка, координаты которой обозначены через ξ_1 и ξ_2. Доказать, что ξ_1 и ξ_2 независимы.

Решение:

Случайный выбор точки подразумевает геометрическое определение, т.е. случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ имеет равномерное распределение в

единичном квадрате. Таким образом,

$$\rho_\xi(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & 0 \le x_1 \le 1,\ 0 \le x_2 \le 1 \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Нетрудно вычислить, что

$$\rho_{\xi_1}(x_1) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho_\xi(x_1, x_2)\, dx_2 = \begin{cases} 1, & 0 \le x_1 \le 1, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В силу симметрии $\rho_{\xi_2}(x_2)$ будет такой же. Но тогда

$$\rho_\xi(x_1, x_2) = \rho_{\xi_1}(x_1) \cdot \rho_{\xi_2}(x_2),$$

что означает независимость ξ_1 и ξ_2.

11.1 Доказать, что распределение P_ξ случайного вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ как функция, заданная на σ–алгебре $\mathcal{B}_n$ борелевских подмножеств пространства R^n обладает следующими свойствами:

1. $\forall B \in \mathcal{B}_n\ P_\xi(B) \ge 0$;
2. $P_\xi(R^n) = 1$;
3. Если $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots \in \mathcal{B}_n$ и $B_i \cap B_j = \emptyset\ \forall i \ne j$, то

$$P_\xi(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P_\xi(B_n)$$

.

11.2 Пусть $F_\xi(x)$, $x \in R^n$ есть функция распределения случайного вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Доказать, что $F_\xi(x)$ обладает следущими свойствами:

1. $F_\xi(x)$ не убывает по каждому аргументу;

2. $F_\xi(x)$ непрерывна слева по каждому аргументу;

3. $\forall i = 1, \ldots, n$ $F_\xi(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \to 0$ при $x_i \to -\infty$

$F_\xi(x_1, \ldots, x_n) \to 1$ при $x_1 \to +\infty, \ldots, x_n \to +\infty$.

4. $\triangle h_1 \ldots \triangle h_n F_\xi(x_1, \ldots, x_n) \geq 0$ для любого $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$ и любых $h_1 > 0, \ldots, h_n > 0$, где

$$\triangle h_i F_\xi(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = F_\xi(x_1, \ldots, x_i + h_i, \ldots, x_n) - F_\xi(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n).$$

5. $\forall x \in R^n$ и $\forall h_1 > 0, \ldots, h_n > 0$

$$P\{x_1 \leq \xi_1 \leq x_1 + h_1, \ldots, x_n \leq \xi_n < x_n + h_n\} = \triangle h_1 \ldots \triangle h_n F_\xi(x_1, \ldots, x_n).$$

11.3 Доказать, что всякая функция $F(x)$, $x \in R^n$ обладающая свойствами 1–4 из предыдущей задачи является функцией распределения некоторого случайного вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

11.4 Функция распределения $F(x)$, $x \in R^n$ случайного вектора ξ однозначно определяет его распределение P_ξ.

Указание. На произвольном прямоугольном параллелепипеде P_ξ определяется с помощью свойства 5 задачи 11.2. Для суммы непересекающихся множеств такого типа определяем P_ξ с помощью свойства аддитивности. Далее применяем теорему о продолжении вероятности.

11.5 Пусть распределение $(X, \{P_{i_1 \ldots i_n}\})$ дискретного случайного вектора $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ (см. определение 4 и 5). Тогда имеют место следующие свойства:

1. $\forall i_1, \ldots, i_n$ $P_{i_1 \ldots i_n} \geq 0$;

2. $\sum\limits_{i_1, \ldots, i_n} P_{i_1 \ldots i_n} = 1$;

3. $P_{i_1, \ldots, i_{n-1}} = P\{\xi_1 = x_{i_1}^{(1)}, \ldots, \xi_{n-1} = x_{i_{n-1}}^{(n-1)}\} = \sum\limits_{i_n} P_{i_1 \ldots i_n}$

4. $\forall B \in \mathcal{B}_n$, $P_\xi(B) = P\{\xi \in B\} = \sum\limits_{(x_{i_1}^{(1)}, \ldots, x_{i_n}^{(n)}) \in B} P_{i_1, \ldots, i_n}$

11.6 Доказать, что пара $(X, \{P_{i_1 \ldots i_n}\})$ (см.замечание 5), где числа $P_{i_1 \ldots i_n}\}$ обладают свойствами 1 и 2 из задачи 11.5, является распределением некоторого случайного вектора со множеством значений X.

11.7 Пусть $F_\xi(x)$ и $\rho_\xi(x)$, $x \in R^n$, есть функция распределения и плотность распределения P_ξ случайного вектора ξ. Доказать, что справедливы следующие свойства:

1. $\forall x \in R^n$, $\rho_\xi(x) \geq 0$,

2. $\int\limits_{R^n} \rho_\xi(x)\, dx = 1$,

3. $\forall B \in \mathcal{B}_n$, $P_\xi(B) = \int\limits_B \rho_\xi(x)\, dx$,

4. $F_\xi(x_1, \ldots, x_n) = \int\limits_{-\infty}^{x_1} \ldots \int\limits_{-\infty}^{x_n} \rho_\xi(y_1, \ldots, y_n)\, dy_1 \ldots dy_n$,

5. во всех точках непрерывности плотности $\rho_\xi(x)$

$$\rho_\xi(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial^n F_\xi(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}.$$

11.8 Любая вещественная функция $\rho(x)$, $x \in R^n$ обладающая свойствами 1 и 2 задачи 11.7, является плотностью некоторого абсолютно непрерывного распределения.

11.9 $F_\xi(x)$ — функция распределения случайного вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Доказать, что $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы тогда и только тогда, когда $\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$,

$$F_\xi(x_1, \ldots, x_n) = F_{\xi_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot F_{\xi_n}(x_n).$$

11.10 Пусть $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — дискретный случайный вектор. Доказать, что $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы тогда и только тогда, когда $\forall x_{i_k}^{(k)} \in X^{(k)}$, $k = 1, \ldots, n$ (см. замечание 5)

$$P\{\xi_1 = x_{i_1}^{(1)}, \ldots, \xi_n = x_{i_n}^{(n)}\} = P\{\xi_1 = x_{i_1}^{(1)}\} \cdot \ldots \cdot P\{\xi_n = x_{i_n}^{(n)}\}.$$

11.11 Пусть $\rho_\xi(x)$, $x \in R^n$ есть плотность абсолютно непрерывного распределения. Доказать, что $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы тогда и только тогда, когда $\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$

$$\rho_\xi(x_1, \ldots, x_n) = \rho_{\xi_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot \rho_{\xi_n}(x_n).$$

11.12 Доказать, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho_{\xi_1, \ldots, \xi_n}(x_1, \ldots, x_n)\, dx_i = \rho_{\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \ldots, \xi_n}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

11.13 Совместное распределение случайных величин ξ и η задано таблицей

ξ η	-1	0	1
-1	0.1	0.2	0.3
1	0.1	0.2	0.1

Найти: а) одномерные распределения;
б) вероятность того, что $\xi = \eta$;
в) совместное распределение $\alpha = \xi + \eta$ и $\beta = \xi - \eta$;
г) одномерные распределения случайных α и β;
д) распределение $\gamma = \alpha\beta$;
е) зависимы ли ξ и η?

11.14 Двумерное распределение задано таблицей

η ξ	1	3
2	0.1	0.2
4	0.3	0.4

Найти вероятность того, что $\max(\xi, \eta) > \eta$.

11.15 Распределение случайного вектора $x = (\xi, \eta)$ задано таблицей

ξ η	5	6	7
5	0.1	0.05	0.1
6	0.2	0.05	0.2
7	0.1	0.1	0.1

Найти распределение случайного вектора $y = (\min(\xi, \eta), \max(\xi, \eta))$.

11.16 Вероятностное пространство (Ω, P) и случайные величины X и Y заданы таблицей

Ω	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
P	0.1	0.2	0.3	0.4
X	1	2	1	4
Y	4	3	4	1

Таблица Т

Найти совместное распределение X и Y.

11.17 Найти функцию распределения случайного вектора $V = (x, y)$ (см. табл. Т) (задача 11.16)

11.18 Зависимы ли случайные величины X и Y. (см. табл. Т).

11.19 Найти распределение двумерной случайной величины $= (X+Y, X-Y)$, (см. табл. Т).

11.20 Зависимы ли случайные величины $X+Y$ и $X-Y$? (см. табл. Т).

11.21 Найти вероятность того, что $X \cdot Y < X + 1$
(табл. Т).

11.22 Найти распределение двумерной случайной величины $E = (X \cdot Y, X+Y)$. (см. табл. Т).

11.23 Двумерное распределение случайной величины E задано таблицей

X Y	0	1	3
-2	0.10	0.05	0.10
2	0.05	0.20	0.05
4	0.05	0.10	0.30

Таблица Е

Найти одномерные распределения для X и Y (см. табл. Е)

11.24 Найти вероятность того, что $X > Y$ (см. табл. Е)

11.25 Зависимы ли величины X и Y? (см. табл. Е)

11.26 Найти распределение случайного вектора $M = (X-Y, X+Y)$ (см. табл. Е).

11.27 Зависимы ли $X - Y$ и $X + Y$? (см. табл. Е).

11.28 Найти распределение случайной величины $M = \min(X, Y)$ (см. табл. Е).

11.29 Найти вероятность того, что $\max(X, Y) > X + Y$ (см. табл. Е).

11.30 Найти функцию распределения, случайного вектора E (см. табл. Е).

11.31 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ и все исходы равновероятны.
$\xi_1(\omega_1) = \xi_1(\omega_2) = \xi_2(\omega_3) = \xi_2(\omega_4) = 1$,
$\xi_1(\omega_3) = \xi_1(\omega_4) = \xi_2(\omega_1) = \xi_2(\omega_2) = -1$.
Найти: а) распределение вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2)$;
б) распределение случайной величины $\eta = \xi_1 \cdot \xi_2$;
в) $P\{\xi_1 + \xi_2 > 0\}$;
г) $P\{\xi_1 = \xi_2\}$.
11.32 Плотность распределения $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$

$$f(x, y, z) = \begin{cases} 6/(1 + x + y + z)^4, \ x > 0, \ y > 0, \ z > 0, \\ 0, \ \text{иначе}. \end{cases}$$

Найти распределение ξ_2.
11.33

$$\rho_\xi(x, y) = \begin{cases} c(x + y), \ 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le 1 \\ 0, \ \text{в остальных случаях}. \end{cases}$$

$\xi = (\xi_1, \xi_2)$.
Найти: 1) постоянную C;
2) одномерные плотности распределения ξ_1 и ξ_2;
3) плотность распределения $\eta = \max(\xi_1, \xi_2)$.
11.34

$$\rho_{\xi,\eta}(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in \mathcal{D} \\ 0, & (x, y) \notin \mathcal{D}. \end{cases}$$

$$\mathcal{D} = \{(x, y) : \ 0 \le x \le 2, \ 0 \le y \le 1 - \frac{1}{2}x\}.$$

Найти $\rho_\xi(x)$.
11.35 ξ_1 и ξ_2 независимы, одинаково распределены с плотностью $f(x)$. Найти совместную плотность распределения $g(r, \varphi)$ полярных координат случайной точки (ξ_1, ξ_2).
11.36 Двумерная плотность распределения $f(x, y)$ случайного вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2)$

$$f(x, y) = \begin{cases} 3 - \frac{3}{2}x - 3y, & (x, y) \in \mathcal{D} \\ 0, & (x, y) \notin \mathcal{D}. \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F_\xi(x, y)$.
11.37 Найти вероятность того, что ξ (см. зад. 11.36) примет значение в области K.
11.38 Найти вероятноость того, что $\xi_1 > 1$ (ξ_1 задана в задаче 11.36)
11.39 Найти функцию распределения ξ_2 (ξ_2 задана в задаче 11.36).
Найти плотность распределения ξ_1 (ξ_1 задана в задаче 11.36)
11.40 Зависимы ли ξ_1 и ξ_2 (ξ_1 и ξ_2 заданы в задаче 11.36).

11.41 Двумерная плотность $f(x, y)$ распределения $\xi = (\xi_1, \xi_2)$

$$f(x, y) = \begin{cases} c, & (x, y) \in A \\ 0, & (x, y) \notin A. \end{cases}$$

а) Найти C.

б) Найти одномерные распределения ξ_1 и ξ_2.

в) Зависимы ли ξ_1 и ξ_2?

г) Найти вероятность того, что $\xi_1^2 + (\xi_2 - 1)^2 \geq 1$.

11.42 $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ равномерно распределена в круге $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$. Найти $P\{|\xi_1| \leq 3/4,\ |\xi_2| \leq 3/4\}$.

11.43 $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ равномерно распределена в прямоугольнике с вершинами (0,0), (0,1), (2,0), (2,1).

а) Найти распределение ξ_1.

б) Найти распределение ξ_2.

в) Зависимы ли ξ_1 и ξ_2?

г) Найти $P\{\xi_1 + \xi_2 < 1\}$.

11.44 $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ равномерно распределена в квадрате $0 \leq x_1 \leq 1$, $0 \leq x_2 \leq 1$. Найти плотность распределения $\eta = (2\xi_1 - \xi_2)$.

11.45

$$\rho_{\xi_1,\xi_2}(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi(x^2+y^2)^3}, & x^2 + y^2 \geq 1 \\ 0, & x^2 + y^2 < 1. \end{cases}$$

Найти плотность распределения $\eta = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$.

11.46 ξ_1 и ξ_2 равномерно распределены на отрезке [0;1] и независимы. Найти совместное распределение величин

$$\eta_1 = \sqrt{-2\ln\xi_1} \cdot \cos 2\pi\xi_2,$$

$$\eta_2 = \sqrt{-2\ln\xi_1} \cdot \sin 2\pi\xi_2,$$

11.47 ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют показательное распределение с параметром $\lambda = 1$. Найти двумерную плотность распределения случайного вектора $(\xi_1 - \xi_2, \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2})$.

11.48 Точка случайным образом падает в эллипс $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$. Её координаты (ξ_1, ξ_2).

а) Найти функцию распределения ξ_1.

б) Найти плотность распределения ξ_2.

в) Зависимы ли и ξ_1 и ξ_2?

11.49 Точка падает случайным образом в треугольник T. Координаты этой точки определяют двумерний вектор (ξ_1, ξ_2). При каком a $(a > 0)$ ξ_1 и ξ_2 зависимы?

11.50 Случайная величина $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ равномерно распределена в $\triangle ABC$:

Случайные величины и определены следующим образом:

$$X = \begin{cases} 0, & \text{если } \xi \in \triangle ABO, \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} 0, & \text{если } \xi \in \triangle ODE, \\ -1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

а) Найти совместное распределение X и Y.
б) Найти вероятность того, что $X + Y > 0$.
в) Зависимы ли X и Y?

§12 ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН И ВЕКТОРОВ

Одной из наиболее распространенных прикладных задач теории вероятностей является функциональное преобразование случайной величины (вектора) и вычисление распределения новой случайной величины.

Определение 1. Отображение $g : R^n \to R^m$ называется борелевским (измеримым по Борелю), если $\forall B \in \mathcal{B}_m$,

$$g^{-1}(B) := \{x \in R^n : \ g(x) \in B\} \in \mathcal{B}_n,$$

где $\mathcal{B}_n$ и $\mathcal{B}_m$ σ–алгебры борелевских подмножеств из R^n и R^m соответственно.

Если $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — случайный вектор, то $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_m) = g(\xi)$, где $g : R^n \to R^m$ — борелевское отображение, есть снова случайный вектор. Пусть P_ξ — распределение случайного вектора ξ, тогда $\forall B \in \mathcal{B}_m$

$$P_\eta(B) := P\{\eta \in B\} = P\{\xi \in g^{-1}(B)\} = P_\xi(g^{-1}(B)). \tag{1}$$

В частности, если

$B_y = (-\infty, y_1) \times \ldots \times (-\infty, y_m) \in \mathcal{B}_m$ то

$$F_\eta(y_1, \ldots, y_m) = P_\xi(g^{-1}(B_y)).$$

Пример 1. Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ равномерно распределен в единичном квадрате. Найти функцию распределения случайной величины $\eta = \xi_1 + \xi_2$.

Решение. В рассматриваемом случае $n = 2$, $m = 1$, $y = g(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. В силу равномерного распределения ξ для вычисления вероятностей можно использовать геометрическое определение вероятности.

Из геометрической картинки видно, что есть три особых точки: $y = 0, \ 1, \ 2$ (они соответствуют случаям $x_1 + x_2 = 0 + 0 = 0$; $x_1 + x_2 = 0 + 1 = 1 + 0 = 1$; $x_1 + x_2 = 1 + 1 = 2$). В силу этого удобно рассмотреть отдельно четыре случая:

1) $y \leq 0$,

$$F_\eta(y) = P\{\eta < y\} = P\{\xi_1 + \xi_2 < y\} = P\{\emptyset\} = 0;$$

2) $0 < y \leq 1$,

$$F_\eta(y) = P\{\xi_1 + \xi_2 < y\} = L(\mathcal{D}_y) = \frac{1}{2}y^2;$$

3) $1 < y \leq 2$,

$$F_\eta(y) = P\{\xi_1 + \xi_2 < y\} = 1 - P\{\xi_1 + \xi_2 \geq y\} = 1 - L(\bar{\mathcal{D}}_y) = 1 - \frac{1}{2}(2 - y^2);$$

4) $y > 2$,

$$F_\eta(y) = P\{\xi_1 + \xi_2 < y\} = P(\Omega) = 1.$$

Собирая все вместе, мы получаем

$$F_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0, \\ \frac{1}{2}y^2, & 0 < y \le 1, \\ 1 - \frac{1}{2}(2 - y^2)^2, & 1 < y \le 2, \\ 1, & y > 2. \end{cases}$$

Пример 2. Случайная величина ξ имеет абсолютно непрерывное распределение с плотностью

$$\rho_\xi(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, \quad x \in R^1$$

(распределение Лапласа). Найти плотность распределения случайной величины $\eta = \xi^2$.

Решение. Здесь $n = m = 1$, $y = g(x) = x^2 \ge 0$. Пусть $y > 0$. Тогда

$$F_\eta(y) = P\{\eta < y\} = P\{\xi^2 < y\} = P\{|\xi| < \sqrt{y}\} =$$

$$= P\{-\sqrt{y} < \xi < +\sqrt{y}\} = \int\limits_{-\sqrt{y}}^{+\sqrt{y}} \rho_\xi(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{-\sqrt{y}}^{+\sqrt{y}} \frac{1}{2}e^{-|x|}\,dx = \int\limits_{0}^{+\sqrt{y}} e^{-x}\,dx = 1 - e^{-\sqrt{y}}.$$

Таким образом,

$$F_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0, \\ 1 - e^{-\sqrt{y}}, & y > 0. \end{cases}$$

Далее,

$$\rho_\eta(y) = \frac{d}{dy}F_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0, \\ \frac{e^{-\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}}, & y > 0. \end{cases}$$

Если $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — дискретный случайный вектор, а $X \subset R^n$ — множество его значений, то $\eta = g(\xi)$ также будет дискретным случайным вектором со множеством значений $Y = g(X) = \{y \in R^m : \ \exists x \in X : \ \ y = g(x)\}$, причем $P\{\eta = y\} = \sum\limits_{x: g(x) = y} P\{\xi = x\}$.

Пример 3. Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые одинаково распределенные случайные величины, имеющие геометрическое распределение с параметром P. Найти распределение случайной величины $\eta = \xi_1/\xi_2$.

Решение. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 — дискретные, имеют множество значений $X = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ и

$$P\{\xi_1 = n\} = P\{\xi_2 = n\} = p(1 - p)^{n-1}, \quad \forall n \in X.$$

Тогда случайная величина η также будет дискретной и ее множество значений совладает с множеством всех положительных рациональных чисел. Пусть числа $k, m \in X$ взаимно просты, т.е. не имеют общих множителей. Тогда

$$P\{\eta = \frac{k}{m}\} = P\{\bigcup_{r=1}^{\infty}(\xi_1 = rk,\ \xi_2 = rm)\} = \sum_{r=1}^{\infty} P\{\xi_1 = rk,\ \xi_2 = rm\} =$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} P\{\xi_1 = rk\} \cdot \{\xi_2 = rm\} = \sum_{r=1}^{\infty} p(1-p)^{rk-1}p(1-p)^{rm-1} =$$

$$= (\frac{p}{1-p})^2 \sum_{r=1}^{\infty}[(1-p)^{k+m}]^r = (\frac{p}{1-p})^2 \frac{(1-p)^{k+m}}{1-(1-p)^{k+m}} = \frac{p^2(1-p)^{k+m-2}}{1-(1-p)^{k+m}}.$$

Пример 4. Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины, принимающие только целые значения. Найти распределение случайной величины $\eta = \xi_1 + \xi_2$.

Решение. Так как ξ_1 и ξ_2 принимают только целые значения то и их сумма $\eta = \xi_1 + \xi_2$ принимает только целые значения. Далее

$$P\{\eta = n\} = P\{\bigcup_{m=-\infty}^{+\infty}(\xi_1 = m,\ \xi_2 = n-m)\} =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} P\{\xi_1 = m,\ \xi_2 = n-m\} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} P\{\xi_1 = m\} \cdot \{\xi_2 = n-m\}.$$

Соотношение

$$P\{\xi_1 + \xi_2 = n\} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} P\{\xi_1 = m\} \cdot \{\xi_2 = n-m\}.$$

называется формулой свертки для целочисленных случайных величин.

Рассмотрим теперь случайный вектор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ с абсолютно непрерывным распределением, которое имеет плотность $\rho_\xi(x)$, $x \in R^n$.

Если отображение $g : R^n \to R^n$ взаимнооднозначно и непрерывно дифференцируемо, то случайный вектор $\eta = g(\xi)$ также имеет абсолютно непрерывное распределение. Действительно,

$$\forall B \in \mathcal{B}_n \quad P\{\eta \in B\} = P\{g(\xi) \in B\} =$$

$$= P\{\xi \in g^{-1}(B)\} = \int\limits_{g^{-1}(B)} \rho_\xi(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_B \rho_\xi(g^{-1}(y))|I^{-1}(g^{-1}(y))|\,dy,$$

где $I(x)$ — якобиан отображения $y = g(x)$, т.е. функция $\rho_\xi(g^{-1}(y))|I^{-1}(g^{-1}(y))|$ является плотностью распределения случайного вектора η. В частности, для $n = 1$

$$\rho_\eta(y) = \rho_\xi(g^{-1}(y))/|g'(g^{-1}(y))|. \qquad (3)$$

Если отображение $y = g(x)$ не является взаимно однозначным, то ситуация может сильно усложниться. Тем не менее, если для фиксированного y множество прообразов $g^{-1}(y)$ имеет конечное число точек в каждой ограниченной области из R^n, то формула (2) заменяется следующим выражением:

$$\rho_\eta(y) = \sum_{x \in g^{-1}(y)} \rho_\xi(x(y))|y^{-1}(x(y))|. \tag{4}$$

Пример 5. Случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром λ. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = 1 - e^{-\lambda\xi}$.

Решение. Случайная величина ξ имеет плотность распределения

$$\rho_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Так как ξ принимает только неотрицательные значения, то $\eta = 1 - e^{-\lambda\xi}$ принимает значения из отрезка $[0, 1]$. В силу этого $\rho_\eta(y) = 0$, если $y \notin [0, 1]$.

Пусть $g(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, тогда $g'(x) = \lambda e^{-\lambda x}$. Для $y \in (0, 1)$ получаем $g^{-1}(y) = -\lambda^{-1} \ln(1 - y)$. По формуле (3) имеем

$$\rho_\eta(y) = \lambda e^{-\lambda(-\lambda^{-1}\ln(1-y))}/|\lambda e^{-\lambda(-\lambda^{-1}\ln(1-y))}| = 1.$$

Собирая все вместе, получаем

$$\rho_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y \notin [0, 1], \\ 1, & y \in [0, 1], \end{cases}$$

т. е. η, распределена равномерно на отрезке $[0, 1]$.

Пример 6. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют абсолютно непрерывные распределения. Найти плотность распределения вероятностей случайной величины $\eta = \xi_1 + \xi_2$.

Решение. Пусть случайные величины ξ_1 и ξ_2 имеют плотности $\rho_{\xi_1}(x)$ и $\rho_{\xi_2}(x)$ соответственно. Тогда совместная плотность распределения случайного вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ имеет вид $\rho_\xi(x_1, x_2) = \rho_{\xi_1}(x_1)\rho_{\xi_2}(x_2)$. Рассмотрим функциональное преобразование $g : R^2 \to R^2$, заданное формулами $y_1 = x_1 + x_2$, $y_2 = x_2$. Оно взаимно однозначно, непрерывно дифференцируемо и определяет случайный вектор $\eta = (\eta_1, \eta_2)$, где $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2$, $\eta_2 = \xi_2$. Вычислим матрицу Якоби этого преобразования:

$$\begin{pmatrix} \partial y_1/\partial x_1 & \partial y_1/\partial x_2 \\ \partial y_2/\partial x_1 & \partial y_2/\partial x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, $|I(x)| = 1$ и $|I^{-1}(x)| = |I(x)|^{-1} = 1$. Обратное отображение $x = g^{-1}(y)$ задается формулами $x_1 = y_1 - y_2$, $x_2 = y_2$. По формуле (2) получаем

$$\rho_\eta(y_1, y_2) = \rho_\xi(y_1 - y_2, y_2) \cdot 1 = \rho_{\xi_1}(y_1 - y_2) \cdot \rho_{\xi_2}(y_2).$$

Нам необходимо вычислить плотность распределения η_1. Как мы уже знаем,

$$\rho_{\eta_1}(y_1) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho_\eta(y_1, y_2)\, dy_2.$$

. Отсюда получаем

$$\rho_{\xi_1+\xi_2}(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho_{\xi_1}(y-x) \cdot \rho_{\xi_2}(x)\, dx.$$

Последнее выражение называется <u>формулой свертки</u> для плотностей.

<u>Пример 7.</u> и ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины, имеющие показательное распределение с параметром λ. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = \xi_1 + \xi_2$.

<u>Решение.</u> По условию

$$\rho_{\xi_1}(x) = \rho_{\xi_2}(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0. \end{cases}$$

По формуле свертки для плотностей

$$\rho_\eta(y) = \rho_{\xi_1+\xi_2}(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho_{\xi_1}(y-x) \cdot \rho_{\xi_2}(x)\, dx.$$

Так как $\rho_{\xi_1}(y-x) = 0$ при $x > y$, а $\rho_{\xi_2}(x) = 0$ при $x < 0$, то

$$\rho_{\xi_1+\xi_2}(y) = \int\limits_0^y \rho_{\xi_1}(y-x)\rho_{\xi_2}(x)\, dx = \int\limits_0^y \lambda e^{-\lambda(y-x)} \cdot \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \lambda^2 e^{-\lambda y} \int\limits_0^y dx = \lambda^2 y e^{-\lambda y}$$

для $y > 0$. При $y < 0$ очевидно, что $\rho_{\xi_1+\xi_2}(y) = 0$. Таким образом, $\xi_1 + \xi_2$ имеет гамма-распределение с параметрами $\alpha = 2$ и $\beta = \lambda$.

<u>I. Дискретные величины</u>

(задачи 12.1 — 12.16)

<u>12.1</u> Распределение дискретной случайной величины ξ определено формулами

$$P\{\xi = i\} = \frac{1}{5}, \quad i = -2, -1, 0, 1, 2.$$

Найти распределения случайных величин:
а) $\eta_1 = |\xi|$,
б) $\eta_2 = \xi^2$.

12.2 Из урны, где 5 белых и 5 черных шаров, вынимаются 2 шара. Из другой урны (1 белый и 4 черных шара) вынимается один шар.

Найти распределение общего числа вынутых белых шаров.

12.3 ξ — число очков при подбрасывании игральной кости.

$$P\{\eta = 1\} = P\{\eta = 0\} = \frac{1}{2}.$$

ξ и η независимы. Найти распределение $\xi + \eta$.

12.4 Найти распределение произведения очков при подбрасывании двух игральных костей.

12.5 Построить график функции распределения $\xi \cdot \eta$, где ξ число успехов в 2-х испытаниях Бернулли с параметром 1/2; η — число успехов в одном испытании Бернулли с параметром 2/3. ξ и η независимы.

12.6 Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ имеет дискретное распределение:

ξ_1 ξ_2	1	2
1	0.16	0.24
2	0.24	

Найти: а) $P\{\xi_1 = 2, \xi_2 = 2\}$.

б) Распределение случайной величины $\eta = |\xi_1 - \xi_2|$.

в) Зависимы ли ξ_1 и ξ_2?

12.7 Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ имеет дискретное распределение

ξ_1 ξ_2	1	2
0	0.3	0.2
1	0.4	

Найти: а) $P\{\xi_1 = 1, \xi_2 = 2\}$.

б) Распределение ξ_2.

в) Совместное распределение случайных величин $\eta_1 = |\xi_1 - \xi_2|$, $\eta_2 = \xi_1 - \xi_2$.

12.8 Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ имеет дискретное распределение:

ξ_1 ξ_2	-1	1
0	0.4	0.1
1		0.4

Найти: а) $P\{\xi_1 = -1, \xi_2 = 1\}$..

б) Распределение ξ_1.

в) Распределение $\xi_1(\xi_2 - 1)$.

г) Совместное распределение $\eta_1 = \frac{\xi_1}{\xi_2}$, $\eta_2 = \xi_1 \cdot \xi_2$.

12.9 Игральную кость подбрасывают до первого выпадения количества очков меньше 5. θ — число очков, выпавших при последнем бросании, ν — число бросаний.

а) Найти совместное распределение θ и ν.

б) Являются ли θ и ν зависимыми?

12.10 Совместное распределение случайных величин X и Y задано таблицей

X Y	0	$\pi/2$	π
π	0.1	0.2	0.3
-π	0.1	0.2	0.1

Найти распределения случайных величин:

а) $a = \sin(x+y)$,

б) $b = X + \sin(x+y)$,

в) $c = \cos(x+y) + y + \sin X$.

12.11 Совместное распределение случайных величин X и Y задано таблицей

X Y	+1	+2	+3
0	0.1	0.1	0.1
-1	0.1	0.2	0.1
-2	0.1	0.1	0.1

Найти распределение случайных величин:

а) $\alpha = \max(x+2, y)$,

б) $\beta = x + y + xy$,

в) $\gamma = \frac{x}{y} - \min(\frac{x}{y}, y-1)$.

12.12 ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют распределения Пуассона с параметрами λ_1 и λ_2. Найти распределение их суммы.

12.13 ξ и η независимы и равномерно распределены на множестве $\{0, 1, \ldots, 9\}$. Представим $\xi + \eta = 10a + b$, где a и b натуральные числа.

Найти: 1) распределение a;

2) распределение b;

3) зависимы ли a и b?

12.14 Из урны с B белыми шарами и K красными без возвращения по одному вынимаются шары.

ξ_1 — число красных шаров, вынутых до первого появления белого ;

ξ_i — число красных шаров, извлеченных между $(i-1)$-м и i-м белыми шарами;

ξ_{B+1} — число красных шаров, появившихся после последнего белого.

Найти:

1) $P\{\xi_1 = k\}$,

2) $P\{\xi_1 = k, \xi_2 = l\}$,

а) распределение ξ_1,

б) совместное распределение ξ_1 и ξ_2,

в) совместное распределение $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{B+1}$.

12.15 Равномерно распределенная на отрезке $[0,1]$ случайная величина ξ записана в виде десятичной дроби

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n 10^{-n},$$

где ξ_n — целые, $0 \leq \xi_n \leq 9$.

Доказать, что независимы $\xi_1, \xi_2, \ldots$.

12.16

$$P\{\xi = 0\} = P\{\xi = 1\} = \frac{1}{2}.$$

η равномерно распределена на отрезке $[0,1]$. Найти распределение:

а) $\zeta_1 = \eta + \xi$,

б) $\zeta_2 = \eta + 1/2\xi$

в) $\zeta_3 = \eta \cdot \xi$.

II. Функции одной непрерывной величины

(задачи 12.17 — 12.35)

12.17 ξ равномерно распределена на отрезке $[0,1]$. Найти распределение случайной величины $\eta = 19\xi - 7$.

12.18 ξ имеет равномерное на $[0,1]$ распределение. Найти $\rho_\eta(x)$ — плотность $\eta = \xi^3$.

12.19 ξ имеет равномерное на $[-1,1]$ распределение. Найти $\rho_\eta(x)$ — плотность распределения $\eta = \xi^2$.

12.20 ξ имеет показательное распределение с параметром λ, $\eta = 2\xi^2+1$. Найти $\rho_\eta(y)$.

12.21 ξ имеет равномерное распределение на $[0,1]$. $\eta = \frac{1}{2\xi^2+1}$. Найти $\rho_\eta(x)$.

12.22 ξ имеет показательное распределение с параметром λ, $\eta = \frac{\xi^2+1}{\xi^2+2}$. Найти $\rho_\eta(y)$.

12.23 Плотность распределения случайной величины ξ задана формулами

$$\rho_\xi(x) = \begin{cases} c/x^4, & x \geq 1, \\ 0, & x < 1. \end{cases}$$

Найти: а) постоянную c,

б) плотность распределения $\eta = 1/\xi$,

в) $P\{0.1 < \eta < 0.3\}$.

12.24 ξ имеет показательное распределение с параметром λ. Найти плотности распределения случайных величин:

а) $\eta_1 = \sqrt{\xi}$,

б) $\eta_2 = \xi^2$,

в) $\eta_3 = 1/\lambda \cdot \ln \xi$,

г) $\eta_4 = \{\xi\}$ (дробная часть ξ),

д) $\eta_5 = 1 - e^{-\lambda\xi}$.

12.25 Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$. Найти плотность распределения $\eta = -\ln(1-\xi)$.

12.26 Точка A равномерно распределена на окружности $x^2 + (y-a)^2 = r^2$ с центром в точке B.

Найти распределение точки пересечения прямой AB с осью абсцисс.

12.27 Случайная величина ξ имеет распределение Коши ($\rho_\xi(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$).

Найти плотность распределения величин:

а) $\eta = \frac{\xi^2}{1+\xi^2}$;

б) $\zeta = \frac{1}{1+\xi^2}$;

в) $\theta = 2\xi/(1-\xi^2)$,

г) $\kappa = 1/\xi$.

12.28 Случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 1$. Найти распределение случайной величины $\eta = [\xi]^2$ ($[\xi]$ — целая часть ξ).

12.29 Случайная величина ξ имеет непрерывную функцию распределения $F(x) = P\{\xi < x\}$. Показать, что случайная величина $\eta = F(\xi)$ равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$.

12.30 Паровоз случайно остановился в тоннеле под прямоугольной горой $a \times b$ м. Найти распределение расстояния от паровоза до белого света $\forall a, b$.

12.31 Двое встречаются под часами. Каждый независимо от другого приходит случайно между 0 и 1 часом. Найти распределение времени ожидания.

12.32 Точка A равномерно распределена в единичном кубе. Найти функцию распределения расстояния от точки A до поверхности куба.

12.33 Кролик случайным образом падает на диагональ квадратного бассейна со стороной a метров. Найти распределение расстояния до берега.

12.34 Окружность с точкой A на ней катится по плоскости и случайно останавливается.

Найти распределение расстояния точки A до плоскости.

12.35 Время горения лампочки имеет показательное распределение с параметром λ.

Включены две такие лампочки. Найти распределение продолжительности "светлой жизни".

III. Случайный вектор. Функции нескольких величин

(12.36 — 12.66)

12.36 Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ имеет плотность распределения

$$\rho_{\xi_1,\xi_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} c(x_1 + x_2), & 0 \le x_1 \le 1,\ 0 \le x_2 \le 1 \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Найти: а) c,

б) $\rho_{\xi_2}(x)$,

в) $P\{\xi_1 - \xi_2 > 0\}$.

12.37 Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ имеет плотность

$$\rho_{\xi_1,\xi_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} cx_1x_2, & x_1,\ x_2 \in [0;1], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Найти: а) c,

б) $\rho_{\xi_1}(x)$,

в) $P\{2\xi_1 + 1/2 > \xi_2\}$.

12.38 Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ имеет плотность распределения

$$\rho_\xi(x_1, x_2) = \begin{cases} c, & -x_2 \le x_1 \le x_2,\ 0 \le x_2 \le 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Найти: а) c,

б) $\rho_{\xi_1}(x)$,

в) $P\{\xi_2 > 1/2\}$.

12.39 Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ имеет плотность распределения

$$\rho_\xi(x_1, x_2) = \begin{cases} c(x_1^2 + x_2^2), & x_1^2 + x_2^2 \le 4, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Найти: а) c,

б) $\rho_{\xi_1}(t)$,

в) $P\{\xi_1 + \xi_2 > 0\}$.

12.40 Случайный вектор (ξ, η) равномерно распределен в области $\{(x, y):\ 0 \le x \le 2,\ 0 \le y < 1 - \frac{1}{2}x\}$.

Найти: а) плотность распределения ξ.

б) $P\{\eta \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]\}$.

12.41 Случайный вектор (ξ, η) равномерно распределен в круге $x^2 + y^2 \le 1$.

Найти: а) $P\{|\xi| < 3/5,\ |\eta| < 3/5\}$;

б) плотность распределения ξ.

12.42 ξ_1 и ξ_2 независимы и одинаково распределены

$$\rho_{\xi_1}(x) = \rho_{\xi_2}(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0;1], \\ 0, & x \notin [0;1], \end{cases} \quad \eta = \xi_1 + 2\xi_2.$$

Найти $\rho_\eta(x)$.

12.43 ξ_1 и ξ_2 независимы и равномерно распределены. ξ_1 — на отрезке [0,1], ξ_2 — на [0,2].

Найти плотность распределения $\eta = \xi_1 \cdot \xi_2$.

12.44 ξ_1 и ξ_2 независимы и равномерно распределены на отрезке $[0, 1]$.

Найти плотность распределения $\eta = \frac{\xi_1}{\xi_1+\xi_2}$.

12.45 ξ и η независимы. ξ равномерно распределена на отрезке $[1,2]$, η — на $[11,12]$.

Найти распределение $\xi + \eta$.

12.46 ξ_1 и ξ_2 независимы и равномерно распределены на отрезке $[0,1]$. Найти распределение их суммы.

12.47 Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы, имеют показательное распределение с параметром $\lambda = 1$.

Найти $P\{|\xi_1 - \xi_2| \leq 1\}$.

12.48 Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы, имеют равномерное распределение на отрезке $[0,a]$. Найти распределения:

а) $\xi + \eta$,

б) $\xi - \eta$,

в) $\xi \cdot \eta$,

г) ξ/η,

12.49 $\xi_1, \ldots, \xi_n$ имеют показательное распределение с параметром $\lambda = 1$ и независимы. Найти распределение случайной величины

а) $X = \xi_1 + \xi_1$,

б) $Y = \xi_1 + \xi_3$,

в) $Z = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$,

г) $W = \xi_1 + \ldots + \xi_n$.

12.50 Случайные величины ξ и η независимы, имеют показательное распределение с параметром единица.

Найти плотности распределения случайных величин:

а) $\xi - \eta$,

б) $|\xi - \eta|$,

в) ξ/η.

12.51 Случайные величины ξ и η независимы. ξ равномерно распределена на $[0,1]$, η распределена показательно с плотностью e^{-x} $(x \geq 0)$. Найти плотность распределения их суммы.

12.52 Случайный вектор (ξ_1, ξ_2) имеет плотность

$$\rho_{\xi_1,\xi_2}(x,y) = \begin{cases} c(x+y) & \text{при } 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Найти: а)c

б) плотность распределения ξ_1,

в) плотность распределения $\eta = \max(\xi_1, \xi_2)$.

12.53 Двумерная плотность $\rho_{\xi_1,\xi_2}(x,y) = \frac{2}{\pi(x^2+y^2)^3}$ при $x^2+y^2 \geq 1$ и ноль, иначе.

Найти плотность случайной величины $\eta = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$.

12.54 Дискретные случайные величины ξ и η независимы и одинаково распределены:

$$P\{\xi = x_k\} = P\{\eta = y_k\} = p_k.$$

Найти $P\{\xi = \eta\}$.

12.55 Случайные величины ξ и η независимы и одинаково распределены, имеют непрерывную функцию распределения $F(x)$. Найти $P\{\xi = \eta\}$.

12.56 Случайная точка $A(x, y)$ равномерно распределена в квадрате

$$\Omega = \{(x, y),\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\},$$

$$\xi_1 = x,\ \xi_2 = \begin{cases} 1 & \text{при } x \ge y, \\ -1 & \text{при } x < y, \end{cases} \quad (\xi_i = \xi_i(\omega)).$$

Найти: а) функцию распределения случайной величины ξ_1,

б) распределение случайной величины ξ_2,

в) функцию распределения случайной величины $\eta = \xi_1^2$,

г) функцию распределения случайной величины $\theta = \xi_1 + \xi_2$.

12.57 ξ_1 и ξ_2 независимы и одинаково распределены

$$\rho_{\xi_1}(x) = \rho_{\xi_2}(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \le 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Найти $\rho_\eta(x)$, $\eta = \frac{\xi_1}{1+\xi_2}$.

12.58 ξ_1 и ξ_2 независимы и одинаково распределены:

$$\rho_{\xi_1}(x) = \rho_{\xi_2}(x) = \begin{cases} 1/2x^3, & x \ge 1, \\ 0, & x < 1. \end{cases}$$

Найти $\rho_\eta(x)$, $\eta = \frac{\xi_1+1}{\xi_2+2}$.

12.59 ξ_1 и ξ_2 независимы и одинаково распределены Найти

$$\rho_{\xi_2}(x) = \begin{cases} 1/x^2, & x \le 1, \\ 0, & x > 1, \end{cases} \quad \eta = \frac{\xi_1}{\xi_2^2}.$$

Найти $\rho_\eta(y)$.

12.60 Случайная величина $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ задана Функцией распределения

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } \min(x, y) < 0; \\ \min(x, y) & \text{если } 0 \le \min(x, y) \le 1; \\ 1, & \text{если } \min(x, y) > 1. \end{cases}$$

Найти $P\{(\xi - 1/2)^2 + (\eta - 1/2)^2 \le 1/4\}$.

12.61 Случайные величины ξ_1 и ξ_2 неотрицательны, независимы, одинаково распределены с плотностью $f(x)$.

Найти плотность распределения:

а) $\eta = \xi_1 - \xi_2$,

б) $\tau = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$.

12.62 Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы, одинаково распределены с плотностью $f(x)$.

Найти двумерную плотность распределения $\varphi(r,\varphi)$ полярных координат точки (ξ_1,ξ_2).

12.63 Случайные величины $\xi_1,\ldots,\xi_n$ независимы, одинаково распределены по показательному закону с параметром α.

Найти плотности распределения случайных величин:

а) $\eta_1 = \max\{\xi_n,\ldots,\xi_1\}$

б) $\eta_2 = \min\{\xi_1,\ldots,\xi_n\}$.

12.64 $\xi_1,\ldots,\xi_n$ $(n \geq 2)$ независимы, одинаково показательно распределены с параметром единица.

Найти плотность распределения случайной величины $\eta = \frac{\xi_1}{\xi_1+\ldots+\xi_n}$.

12.65 Точка $C(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ равномерно распределена на сфере

$$x^2+y^2+z^2=1.$$

Найти распределение ξ_1.

12.66 Имеется два кресла. Двое уселись одновременно. Третий ждет освобождения места. Время сидения каждого — случайная величина, показательно распределенная с параметром λ. Найти вероятность того, что

а) третий усядется на место первого,

б) третий встанет раньше второго или первого, и плотность распределения времени ожидания.

12.67. А Найти плотность распределения случайной величины ξ, если ξ нормально распределена с параметрами 0 и 1.

12.67. Б Найти плотность распределения случайной величины $\xi_1+\xi_2$, если ξ_1 и ξ_2 независимы, имеют гамма-распределение с параметрами (α_1,β) и (α_2,β).

Указание: воспользоваться формулой

$$\int\limits_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

12.67. В Найти плотность распределения случайной величины $\chi_n^2 = \xi_1^2+\ldots+\xi_n^2$, если $\xi_1,\ldots,\xi_n$ независимы и нормально распределены с параметрами $(0;1)$.

12.67. Г Найти плотность распределения случайной величины

$$\sqrt{\frac{1}{n}(\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2)},$$

если $\xi_1,\ldots,\xi_n$ независимы и нормально распределены с параметрами $(0;1)$.

12.67. Д Найти плотность распределения случайной величины

$$\tau_n = \frac{\xi_0}{\sqrt{\frac{1}{n}(\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2)}},$$

если $\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_n$ независимы, нормально распределены с параметрами $(0;1)$.