§9 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТНОГО ПРОСТРАНСТВА В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

До сих пор мы рассматривали, в основном, только такие случайные эксперименты, в которых мы имеем конечное или счетное число элементарных исходов. Именно для такой ситуации выше было дано определение дискретного вероятностного пространства. Но многие реальные задачи не могут быть описаны в рамках этой модели, поэтому нужно более общее определение. Такое определение вероятностного пространства было, дано А.Н.Колмогоровым в его книге "Основные понятия теории вероятностей".

Пусть задано произвольное множество Ω которое мы интерпретируем как пространство элементарных исходов (множество возможных исходов, которыми заканчивается проведение эксперимента).

Определение 1. Семейство $\mathcal{A}$ подмножеств пространства Ω называется σ–алгеброй, если

1) $\Omega \in \mathcal{A}$;

2) если $A \in \mathcal{A}$, то и $\bar{A} \in \mathcal{A}$;

3) если $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{A}$, то $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Замечание 1. Элементы σ–алгебры $\mathcal{A}$ называются случайными событиями.

Замечание 2. Выбор определенной σ–алгебры в реальной задаче соответствует определенному уровню информации о случайном эксперименте. В $\mathcal{A}$ входят те случайные события, о наступлении или ненаступлении которых мы можем судить на основе имеющейся у нас информации об окончании эксперимента. Часто определенная σ–алгебра выбирается из соображений наиболее простого описания эксперимента или математического удобства.

Как правило, в реальных задачах тот исходный набор событий, с которым мы имеем дело, не образует σ–алгебры. Это приводит нас к следующему определению. Пусть $\mathcal{M}$ — некоторое семейство подмножеств пространства Ω.

Определение 2. σ–алгеброй, порожденной семейством $\mathcal{M}$ называется наименьшая σ–алгебра, содержащая данное семейство подмножеств, т.е. такое семейство $\sigma(\mathcal{M})$ подмножеств пространства Ω, которое обладает следующими свойствами:

1) $\mathcal{M} \subset \sigma(\mathcal{M})$;

2) $\sigma(\mathcal{M})$ — σ–алгебра;

3) Если $\mathcal{A}$ — некоторая σ–алгебра, обладающая свойствами 1 и 2, то $\sigma(\mathcal{M}) \subset \mathcal{A}$.

Замечание 3. Порожденная σ–алгебра существует для любого семейства $\mathcal{M}$ и совпадает с пересечением всех σ–алгебр, содержащих $\mathcal{M}$.

Пример 1. $\Omega = R$, $\mathcal{M} = \{A \subset R : \quad A = (a, b),\ -\infty < a < b < +\infty\}$ — семейство всех открытых интервалов из R. В этом случае σ–алгебра $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{M})$ называется борелевской σ–алгеброй, а ее элементы борелевскими множествами.

Покажем, например, что множество $A = [a, b)$ является борелевским. Рассмотрим последовательность множеств $A_n = (a - 1/n, b) \in \mathcal{M}$ и, следовательно,

$A_n \in \mathcal{B}$. Так как $\mathcal{B}$ — σ–алгебра, то $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}$ (см. задачу 9.2).

Определение 3. Вероятностным пространством называется тройка $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$, где Ω — произвольное множество (пространство элементарных исходов), $\mathcal{A}$ — σ–алгебра его подмножеств (семейство случайных событий), а P — вещественная функция, заданная на A, такая, что

1) $\forall A \in \mathcal{A} \quad P(A) \geq 0$;

2) $P(\Omega) = 1$;

3) если $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n,\ \ldots \in \mathcal{A}$ — последовательность попарно несовместных событий, т.е. $A_i \bigcap A_j = \emptyset$, если $i \neq j$, то

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Замечание 4. Функция P называется вероятностью (вероятностной мерой, распределением вероятностей), а число $P(A)$ — вероятностью (появления) события A.

Замечание 5. Свойство 3 называется счётной аддитивностью вероятности P (об эквивалентных ему свойствах см. в задаче 9.13).

Пример 2. Пусть M — семейство открытых шаров в R^m. Тогда $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{M})$ называется борелевской σ–алгеброй в R^m, а ее элементы — борелевскими множествами. Пусть $\Omega \subset R^m$ — ограниченное борелевское множество, $\mathcal{A}$ — σ–алгебра его борелевских подмножеств, $\mathcal{L}$ — мера Лебега в R^m ("длина— в R^1, "площадь— в R^2, "объем— в R^3). Для любого $A \in \mathcal{A}$ положим

$$P(A) = \mathcal{L}(A)/\mathcal{L}(\Omega).$$

Свойствами 1 и 2 вероятности здесь очевидно выполняются. Свойство счетной аддитивности вытекает из аналогичного свойства меры Лебега. Таким образом, тройка $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$ задает некоторое вероятностное пространство. Это есть аккуратное оформление математической модели, которая в §4 называлась геометрическим определением вероятности.

9.1 Для любого пространства Ω семейство всех его подмножеств образует σ–алгебру.

9.2 Пусть $\mathcal{A}$ некоторая σ–алгебра. Доказать следующие свойства:

1) A замкнута относительно всех теоретико-множественных операций;

2) $\emptyset \in \mathcal{A}$;

3) если $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n,\ \ldots \in \mathcal{A}$ то $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$;

4) если $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n,\ \ldots \in \mathcal{A}$ то множества

$$A^* = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \quad \text{и} \quad A_* = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n$$

принадлежат $\mathcal{A}$. Дать вероятностную интерпретацию этих событий. События A^* и A_* называются соответственно верхним и нижним пределом последовательности событий $\{A_n\}$.

9.3 Пусть A и B — два фиксированных подмножества пространства Ω. Положим

$$A_n = \begin{cases} A, & \text{если} \quad n \text{ — нечетное,} \\ B, & \text{если} \quad n \text{ — четное.} \end{cases}$$

Доказать, что $A^* = A \cup B$, $A_* = A \cap B$ (см. задачу 9.2). Дать вероятностную интерпретацию этих результатов.

9.4 Пусть $\{A_n\}$ и $\{B_n\}$ — убывающая и возрастающая последовательности подмножеств пространства Ω, т.е.

$$A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$$

$$B_1 \subset B_2 \subset \ldots \subset B_n \subset \ldots$$

Доказать, что 1) $A^* = A_* = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$; 2) $B^* = B_* = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$.

9.5 Пусть $\mathcal{A}_\alpha$, $\alpha \in \mathrm{I}$ — произвольное семейство σ–алгебр подмножеств одного и того пространства Ω. Доказать, что $\mathcal{A} = \bigcap\limits_{\alpha \in \mathrm{I}} \mathcal{A}_\alpha$ является σ–алгеброй.

9.6 Пусть Ω — несчетное множество. A — семейство всех его не более чем счетных подмножеств и дополнений. Доказать, что $\mathcal{A}$ — σ–алгебра.

9.7 Доказать, что в R

1) множество $A = [a, b]$ борелевское;

2) любое открытое множество борелевское;

3) множество $A = \{a\}$, $a \in R$ борелевское.

9.8 Пусть $f : R \to R$ — непрерывная функция. Доказать, что $\forall x \in R$ множество $A = \{y : \quad f(y) < x\}$ борелевское.

9.9 Говорят, что система $\mathcal{M}$ множеств $A_1, \ldots, A_n$ образует разбиение пространства Ω, если

1) $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$;

2) $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$,

Описать σ–алгебру, порожденную системой $\mathcal{M}$. Рассмотреть отдельно случай $n = 2$.

9.10 Непустое подмножество A пространства Ω называется атомом σ–алгебры $\mathcal{A}$, если

1) $A \in \mathcal{A}$;

2) если $B \in \mathcal{A}$, $B \neq \emptyset$, $B \subset A$, то $B = A$.

Доказать, что в случае, когда σ–алгебра $\mathcal{A}$ конечна, то существует конечное число атомов $A_1, \ldots, A_n$ σ–алгебры $\mathcal{A}$, которые образуют разбиение Ω и порождают всю σ–алгебру $\mathcal{A}$.

9.11 Пусть пара (Ω, P) задает дискретное вероятностное пространство (см. §3). Обозначим через $\mathcal{A}$ систему всех подмножеств пространства Ω и положим $\forall A \in \mathcal{A}$

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega).$$

Доказать, что тройка $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$ является вероятностным пространством.

9.12 Пусть вероятностное пространство $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$ обладает тем свойством, что существует не более чем счетное семейство $\mathcal{M} = \{A_1,\ A_2,\ \ldots\}$ элементов σ–алгебры $\mathcal{A}$, которые образуют разбиение пространства Ω и порождают всю σ–алгебру $\mathcal{A}$. Доказать:

1) все элементы системы $\mathcal{M}$ являются атомами σ–алгебры $\mathcal{A}$;

2) пара $(\Omega',\ P')$, где $\Omega' = \mathcal{M}$, а $P'(\omega') = P(A_n)$, если $\omega' = A_n \in \mathcal{M}$, является дискретным вероятностным пространством;

3) конструкция, описанная в задаче 9.11, приводит к вероятностному пространству $(\Omega',\ \mathcal{A}',\ P')$, которое изоморфно вероятностному пространству $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$ в том смысле, что существует взаимнооднозначное соответствие $g : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$, такое, что $\forall A \in \mathcal{A}\ P(A) = P'(g(A))$.

9.13 Пусть $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$ — произвольное вероятностное пространство. Доказать, что следующие свойства вероятности P эквивалентны:

1) если $A_1,\ \ldots,\ A_n \in \mathcal{A}$, $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, то $P(A_n) \to 0$ — непрерывность на пустом множестве;

2) если $A_1,\ \ldots,\ A_n \in \mathcal{A}$, $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = A$, то $P(A_n) \to P(A)$ — непрерывность сверху;

3) если $A_1,\ \ldots,\ A_n \in \mathcal{A}$, $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = A$, то $P(A_n) \to P(A)$ — непрерывность снизу;

4) если $A_1,\ \ldots,\ A_n \in \mathcal{A}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, то

$$P(\sum_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

— счетная аддитивность вероятности.

9.14 Пусть $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$ — произвольное вероятностное пространство, $A_1,\ \ldots,$ $A_n \in \mathcal{A}$: $A^* = A_* = A$ (смотри задачу 9.2). Тогда

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

В общем случае для произвольной последовательности $\{A_n\}$

$$P(A_*) \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} P(A_n) \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} P(A_n) \leq P(A^*).$$

9.15 Доказать, что для любой последовательности $\{A_n\}$ событий

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = P(A_1) + P(\bar{A}_1 A_2) + \ldots + P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \ldots \bar{A}_{n-1} A_n) + \ldots .$$

9.16 Лемма Бореля-Кантелли. Пусть $\{A_n\}$ — произвольная последовательность событий.

1. Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, то $P(A^*) = 0$.

2. Если $\{A_n\}$ независимы в совокупности и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$, то $P(A^*) = 1$.

9.17 Имеем схему Бернулли с бесконечным числом испытаний и вероятностью успеха $p > 0$. Доказать, что в таком случайном эксперименте будет бесконечное число успехов.

9.18 Класс $\mathcal{M}$ подмножеств пространства Ω называется полуалгеброй, если

1) $\Omega \in \mathcal{M}$;

2) если $A,\ B \in \mathcal{M}$, то $A \cap B \in \mathcal{M}$;

3) если $A,\ B \in \mathcal{M}$, $A \subset B$, то существуют попарно непересекающиеся множества $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n \in \mathcal{M}$,такие, что $A_1 = A$, $A + A_2 + \ldots + A_n = B$.

Доказать, что следующие семейства множеств являются полуалтебрами:

а) $\mathcal{M} = \{[a,b),\ (-\infty,b),\ a,\ b \in R\}$ для $\Omega = R$;

б) $\mathcal{M} = \{[a_1,b_1) \times \ldots \times [a_n,b_n)$ и $(-\infty,b_1) \times \ldots \times (-\infty,b_n),\ a_i,\ b_i \in R,\ i = 1,\ldots,n\}$ для $\Omega = R^n$.

9.19 Класс $\mathcal{M}$ подмножеств пространства Ω называется алгеброй, если

1) $\Omega \in \mathcal{M}$;

2) если $A,\ B \in \mathcal{M}$, то $A \cup B \in \mathcal{M}$;

3) если $A \in \mathcal{M}$, то $\bar{A} \in \mathcal{M}$.

Доказать, что любая алгебра является полуалгеброй. Привести пример полуалгебры, которая не является алгеброй.

9.20 Пусть $\mathcal{M}$ — полуалгебра подмножеств пространства Ω, $\mathcal{A}$ — система всех конечных объединений непересекающихся множеств из $\mathcal{M}$. Доказать, что $\mathcal{A}$ — алгебра.

9.21 Пусть $\mathcal{M}$ — полуалгебра подмножеств пространства Ω, $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{M})$ — алгебра, порожденная системой $\mathcal{M}$. Если на полуалгебре $\mathcal{M}$ задана монотонная, нормированная функция P, то существует единственная конечно-аддитивная вероятность $\bar{P}$ на $\mathcal{A}$, совпадающая с P на $\mathcal{M}$.

9.22 Теорема о продолжении вероятности. Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра подмножеств пространства Ω, $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{M})$ — σ–алгебра, порожденная системой $\mathcal{M}$. Если P — счетно-аддитивная вероятность, заданная на $\mathcal{M}$, то существуют единственная счетно-аддитивная вероятность $\bar{P}$ на $\mathcal{A}$, совпадающая с P на $\mathcal{M}$.

9.23 Пусть $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$ — произвольное вероятностное пространство. Доказать, что множество значений функции $P(A)$, $A \in \mathcal{A}$ есть замкнутое подмножество отрезка $[0,1]$.

9.24 Пусть $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$ — ноатомарное вероятностное пространство, т.е. $\forall A \in \mathcal{A}$ $P(A) > 0$ существует $B \in \mathcal{A}$: $B \subset A$ и $0 < P(B) < P(A)$. Тогда множество значений функции $P(A)$, $A \in \mathcal{A}$, совпадает с отрезком $[0,1]$.

9.25 Пусть $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$ — вероятностное пространство. Назовем A и B эквивалентными, если $P(A \triangle B) = 0$. Обозначим через S множество классов эквивалентности. $\forall \mathcal{B}_\infty,\ \mathcal{B}_\in \in S$ положим

$$\rho(\mathcal{B}_\infty, \mathcal{B}_\in) = P(B_1 \triangle B_2),$$

где B_1 и B_2 — произвольные представители классов $\mathcal{B}_\infty$, $\mathcal{B}_\in$. Доказать, что ρ — метрика на S и $(S,\, \rho)$ — полное метрическое пространство.

9.26 Пусть $(\Omega,\, \mathcal{A},\, P)$ — вероятностное пространство. $\mathcal{M}$ — алгебра подмножеств пространства Ω, порождающая σ–алгебру $\mathcal{A}$. Доказать, что $\forall \varepsilon > 0$ и $\forall A \in \mathcal{A}$ существует $B \in \mathcal{M}$:

$$\P(A \triangle B) < \varepsilon.$$

Попытайтесь с помощью этой задачи доказать теорему о продолжении вероятностей.

9.27 Пусть Ω — борелевское множество в R^n, $f : \Omega \to R$ — неотрицательная, интегрируемая функция, такая, что

$$\int\limits_\Omega f(x)\, dx = 1.$$

Обозначим через $\mathcal{A}$ σ–алгебру борелевских подмножеств множества Ω и положим $\forall A \in \mathcal{A}$

$$P(A) = \int\limits_A f(x)\, dx.$$

Доказать, что $(\Omega,\, \mathcal{A},\, P)$ — вероятностное пространство.

9.28 Пусть $F(x)$ — действительная функция, заданная на R^1 и обладающая следующими свойствами:

1) $0 \le F(x) \le 1$, $\forall x \in R^1$;

2) $F(x)$ непрерывна слева;

3) $F(x)$ неубывающая;

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$.

Пусть $\mathcal{A}$ — полуалгебра подмножеств, определенная в задаче 9.18 а). Положим:

$\forall A = [a, b)$, $P(A) = F(b) - F(a)$,

$\forall A = (-\infty, b)$, $P(A) = F(b)$, $\forall a,\ b \in R^1$.

Доказать, что P можно однозначно определить на σ–алгебре $\mathcal{A}$ всех борелевских подмножеств из R так, что $\forall A \in \mathcal{M}$ P определена по указанному выше правилу и является на $\mathcal{A}$ счетно-аддитивной вероятностью.

9.29 Пусть $F(x)$ — действительная функция, заданная на R^n и обладающая следующими свойствами:

1) $0 \le F(x) \le 1$, $\forall x \in R^n$;

2) $F(x)$ непрерывна слева по каждому аргументу;

3) $F(x)$ не убывает по каждому аргументу;

4) $F(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \to 0$ при $x_i \to -\infty$ $\forall i$,

$F(x_1, \ldots, x_n) \to 1$ при $x_1 \to +\infty$, $\ldots$, $x_n \to +\infty$,

5) $\triangle h_1 \ldots \triangle h_n F(x_1, \ldots, x_n) > 0$ $\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$, $\forall h_1 > 0$,$\ldots$, $\forall h_n > 0$,
где $\triangle h_i$ — оператор образования разности по i-ой координате на отрезке длины h_i.

Пусть $\mathcal{M}$ — полуалгебра подмножеств, определенная в задаче 9.18 в). Положим $\forall A = [x_1, x_1 + h_1) \times \ldots \times [x_n, x_n + h_n)$

$$P(A) = \triangle h_1 \ldots \triangle h_n F(x_1, \ldots, x_n).$$

Доказать, что P можно однозначно определить на σ–алгебре $\mathcal{A}$ всех борелевских подмножеств из R^n так, что P будет счетно-аддитивной вероятностью на $\mathcal{A}$ и определена на $\mathcal{M}$ по указанному выше правилу.

§10. СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА И ЕЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Пусть $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$ — фиксированное вероятностное пространство, $\mathcal{B}$ — борелевская σ–алгебра в R^1.

Определение 1. Случайной величиной (с.в.) называется отображение $\xi : \Omega \to R^1$, такое, что

$$\forall B \in \mathcal{B} \quad \xi^{-1}(B) = \{\omega :\ \xi(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}. \tag{1}$$

Определение 2. Распределением с.в. ξ называется вещественная функция P_ξ, заданная на борелевской σ–алгебре $\mathcal{B}$ по правилу

$$P_\xi(B) = P\{\xi \in B\} \qquad \forall B. \tag{2}$$

Замечание 1. Любая функция не Ω, обладающая свойством (1), называется измеримой (более точно $\mathcal{A}$–измеримой или $(\mathcal{A},\ \mathcal{B})$–измеримой).

Замечание 2. В реальных задачах, конечно, с.в. не задается как функция на Ω, так как никакого фиксированного вероятностного пространства для данного случайного эксперимента нет. И вероятностное пространство, и функция ξ на нем являются удобными математическими моделями для изучения общих свойств с.в. В конкретном случайном эксперименте с.в. задается только своим распределением или какой-либо другой эквивалентной ему вероятностной характеристикой.

Для задания распределения с.в. нужно знать вероятности попадания в любые борелевские множества. Такая характеристика с.в с практической точки зрения является довольно сложной. Ее нельзя изобразить графически, задать простой формулой и т.д. Поэтому вводится другая, эквивалентная распределению, вероятностная характеристика с.в.

Определение 3. Функцией распределения (ф.р.) с.в. называется функция F_ξ , заданная на R_1 по правилу

$$F_\xi(x) = P\{\xi < x\}, \quad x \in R^1. \tag{3}$$

Замечание 3. Ф.р. однозначно определяется по распределению P_ξ и сама, в свою очередь, однозначно его определяет (см. задачу 10.3).

Замечание 4. Свойства ф.р. см. ниже (задача 10.1).

Пример 1. Из отрезка $[0;1]$ случайным образом выбирается точка A. С.в. ξ есть квадрат расстояния от A до левого конца отрезка.

Решение.

Так как результатом эксперимента является выбор случайной точки A из отрезка $[0;1]$, то естественно выбрать $\Omega = [0;1]$. В качестве A возьмем борелевскую σ–алгебру $\mathcal{B}([0;1])$. Случайный выбор точки подразумевает равновероятность, т.е. мы имеем дело с геометрическим определением вероятности и $P = L$, где L — мера Лебега. В данном случае $\xi(\omega) = \omega^2$. Пусть B — произвольное борелевское подмножество на $[0;1]$. Обозначим
$B_1 = \{\omega : \ \omega^2 \in B \subset [0;1]\}$. Тогда
$P_\xi(B) = P\{\xi \in B\} = P\{\omega : \ \omega^2 \in B\} = P\{\omega : \ \omega \in B_1\} = L(B_1)$.
Вычислим ф.р. Так как $\xi(\omega) = \omega^2 \in [;1] \ \forall \omega \in [0;1]$, то

1) $\forall x \leq 0$
$F_\xi(x) = P\{\xi < x\} = P(\emptyset) = 0;$
2) $\forall x > 1$
$F_\xi(x) = P\{\xi < x\} = P(\Omega) = 1;$
3) $\forall x \in [;1]$
$F_\xi(x) = P\{\xi < x\} = P\{\omega : \ \omega^2 < x\} = P\{\omega : \ \omega < \sqrt{x}\} = L([0;\sqrt{x}]) = \sqrt{x}.$

Среди всех распределений с.в. выделяют следующие три класса распределений (Опр. 4,5,6).

Определение 4. Распределение с.в. ξ называется дискретным, если существует конечное или счетное множество $X = \{x_1, x_2, \ldots\} \subset R^1$. $P\{\xi \in X\} = 1$.

Замечание 5. Если $\forall x \in X$, $P\{\xi = x\} > 0$, то X называется множеством значений ξ.

Замечание 6. Если распределение с.в. ξ дискретно, то и сама случайная величина называется дискретной.

Замечание 7. Если $X = \{x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots\}$ — множество значений дискретной случайной величины, то $P_n = P\{\xi = x_n\}$ называется вероятностью появления значения x_n.

Замечание 8. Ниже будет показано (см.задачу 10.5), что множество значений X и набор вероятностей P_n, $n \geq 1$ значений дискретной с.в. ξ однозначно определяют распределение P_ξ. В силу этого пару $(X, \{P_n\})$ также называют (вообще говоря, не совсем аккуратно) распределением дискретной с.в. ξ. Всюду ниже, когда необходимо найти распределение дискретной с.в., имеется в виду именно задание этой пары.

На практике наиболее часто используются следующие дискретные распределения.

1. Распределение Бёрнулли с параметром p,

$$X = \{0;1\}, \quad P\{\xi = 1\}, \quad P\{\xi = 0\} = 1 - p = q, \quad 0 < p < 1.$$

2. Биномиальное распределение с параметрами n и p

$$X = \{0,1,2,\ldots,n\}, \ P\{\xi = k\} = C_n^k p^k q^{n-k} = b(n,p,k), \ 0 \leq k \leq n, \ 0 < p < 1. \quad (4)$$

3. Распределение Пуассона с параметром λ.

$$X = \{0, 1, 2, \ldots, k, \ldots\},\ P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \pi_k,\ k = 0, 1, \ldots,\ 0 < \lambda < \infty.$$

4. Гипергеометрическое распределение с параметрами N, N_1, n.

$$X = \{0, 1, 2, \ldots, \min(n, N_1)\},\ P\{\xi = k\} = \frac{C_{N_1}^k C_{N-N_1}^{n-k}}{C_N^n},\ N_1 \leq N,\ n \leq N.$$

Интерпретация: из урны N шаров (N_1 — белых и $N - N_1$ черных) вынимаются n шаров, $P\{\xi = k\}$ — вероятность иметь k белых шаров среди вынутых.

Пример 2. Симметричную монету подбрасывают два раза с.в. ξ — число выпавших гербов. Найти распределение ξ.

Решение.

Это типичная задача на схему Бернулли, где мы имеем два испытания ($n = 2$) и вероятность успеха $P = 1/2$. По смыслу задачи $X = \{0, 1, 2\}$. По формуле 1 из §7 имеем

$$P\{\xi = k\} = C_2^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{2-k},$$

т.е. ξ имеет биномиальное распределение с параметрами $n = 2$, $p = 1/2$.

Определение 5. Распределение с.в. ξ называется абсолютно непрерывным (относительно меры Лебега), если существует такая вещественная функция $\rho_\xi(x)$, $x \in R^1$, что $\forall \sigma \in \mathcal{B}$

$$P_\xi(B) = P\{\xi \in B\} = \int\limits_B \rho_\xi(x)\, dx. \tag{5}$$

Замечание 9. Функция $\rho_\xi(x)$ называется плотностью распределения (п.р.) с.в. ξ. Устаревшим названием является дифференциальная функция распределения. Случайная величина ξ, имеющая абсолютно непрерывное раопределение иногда называется непрерывной.

Замечание 10. Плотность распределения $\rho_\xi(x)$ однозначно определяет распределение P_ξ (см. формулу (5)). Поэтому, когда хотят найти распределение в абсолютно непрерывном случае, имеют в виду именно плотность.

Замечание 11. Свойства п.р. $\rho_\xi(x)$ смотри в задаче 10.6.

Наиболее часто в реальных задачах используются следующие абсолютно непрерывные распределения

1. Равномерное распределение на отрезке $[a, b]$.

$$\rho_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$$

2. Нормальное распределение с параметрами a и σ^2

$$\rho_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},\ x \in R^1,\ a \in R^1,\ \sigma > 0.$$

3. Показательное распределение с параметром λ

$$\rho_\xi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad \lambda > 0$$

4. Гамма–распределение с параметрами α. и β.

$$\rho_\xi(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta\alpha}, & \alpha > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad \alpha > 0, \beta > 0$$

5. Распределение Коши с параметром a.

$$\rho_\xi(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a^2}{a^2 + x^2}, \quad x \in R^1, \ a > 0.$$

Пример 3. Случайным образом выбирают точку из единичного квадрата. С.в. ξ — расстояние до фиксированной диагонали.

Решение. Как и в примере 1, мы имеем задачу на геометрическую вероятность. В данном случае $\Omega = [0;1] \times [0;1]$, $\omega = (y_1, y_2)$, y_1, $y_2 \in [0;1]$. Вычислим сначала ф.р. F_ξ . Так как очевидно, что ξ принимает значения только из отрезка $[0; \sqrt{2}/2]$, то $F_\xi = 0$, если $x \leq 0$ и $F_\xi = 1$ если $x > \sqrt{2}/2$. Пусть $x \in [0; \sqrt{2}/2]$.

$$F_\xi(x) = P\{\xi < x\} = 1 - (1 - x\sqrt{2})^2 = 2\sqrt{2}x - 2x^2.$$

Так как $\rho_\xi(x) = \frac{d}{dx} F_\xi(x)$ (см. задачу 10.6), то

$$\rho_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 2\sqrt{2} - 4x, & 0 \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ 0, & x > \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

Определение 6. Распределение с.в. ξ называется сингулярным, если существует такое борелевское подмножество $X \subset R^1$, мера Лебега которого равна нулю и

$$P\{\xi \in X\} = 1. \tag{6}$$

Замечание 12. По этому определению дискретное распределение является сингулярным. Но обычно сингулярным называют такое распределение, для которого кроме свойства (6) дополнительно имеет место

$$P\{\xi = x\} = 0, \quad \forall x \in R^1.$$

Замечание 13. Одномерные сингулярные распределения в реальных задачах встречаются крайне редко и мы их в дальнейшем рассматривать не будем.

Теорема (Лебега о разложении). Пусть P_ξ — распределение вероятностей некоторой с.в. ξ. Тогда существуют такие распределения вероятностей P_1, P_2 и P_3

заданные на борелевской σ–алгебре $\mathcal{B}$ и неотрицательные числа α_1, α_2 и α_3, $\sum \alpha = 1$, что $\forall B \in \mathcal{B}$

$$P_\xi(B) = \alpha_1 P_1(B) + \alpha_2 P_2(B) + \alpha_3 P_3(B).$$

Здесь распределение P_1 — дискретное, P_2 — абсолютно непрерывное, P_3 — сингулярное.

Замечание 14. Распределение P_ξ называется смесью распределений P_1, P_2 и P_3 с весами α_1, α_2 и α_3.

Замечание 15. P_1, P_2 и P_3 называются соответственно дискретной, абсолютно непрерывной и сингулярной компонентами распределения P_ξ.

Замечание 16. На практике мы имеем дело только со смесями дискретных и абсолютно непрерывных распределений.

Замечание 17. Если какой-либо из весов $\alpha = 1$ (а значит, остальные равны нулю), то распределение называется чистым.

Пример 4. С.в. ξ имеет равномерное распределение на отрезке [-2,2]. Новая с.в. η является срезкой с.в. ξ на уровне 1, т.е.

$$\eta = \begin{cases} -1, & \xi < -1, \\ \xi, & |\xi| \le 1, \\ 1, & \xi > 1. \end{cases}$$

Найти распределение с.в. η и выделить дискретную и абсолютно непрерывную составляющие.

Решение. Зададим распределение с.в. η с помощью ее ф.р. Т.к. эта задача уже рассматривалась выше выпишем конечный результат.

$$F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1, \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(x+1), & -1 < x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Так как на отрезке [-1,1] η и ξ совпадают, то их распределения там одинаковы. Таким образом, η на отрезке имеет равномерное распределение. Кроме того, распределение имеет две дискретные точки $+1$ и -1, так как

$$P\{\eta = -1\} = P\{\xi < -1\} = 1/4,$$

$$P\{\eta = +1\} = P\{\xi > 1\} = 1/4.$$

В итоге распределение P_2 имеет дискретную компоненту P_1 приписывающую равные вероятности (и потому равные 1/2), ее вес равен $\alpha_1 = 1/4 + 1/4 = 1/2$, и абсолютно непрерывную компоненту P_2, являющуюся равномерным распределением на $[-1;1]$, ее вес ранен $\alpha_2 = 1/2$.

Приведем теперь примеры решения некоторых задач о случайных величинах и их распределениях.

Пример 5. Распределение дискретной с.в. задано таблицей:

x_n	-1	0	1	2	3
P_n	0.1	0.3	0.2	0.1	0.3

Вычислить функцию распределения и построить ее график.

Решение. Для решения задачи полезно нарисовать числовую ось и нанести на нее значения с.в.

Значения с.в. ξ разделили R^1 на несколько интервалов. Удобнее Вычислять $F_\xi(x)$ для каждого интервала в отдельности:

1) $x \leq -1$.

$F_\xi(x) = P\{\xi < x\} = P(\emptyset) = 0$;

2) $-1 < x \leq 0$.

$F_\xi(x) = P\{\xi < x\} = P(\xi = -1\} = 0.1$;

3) $0 < x \leq 1$.

$F_\xi(x) = P\{\xi < x\} = P(\xi = -1) \cup (\xi = 0)\} = P\{\xi = -1\}+ P\{\xi = 0\} = 0.1 + 0.3 = 0.4$.

Аналогично проводятся вычисления и на других интервалах. Сводя все воедино, получим

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ 0.1, & -1 < x \leq 0, \\ 0.4, & 0 < x \leq 1, \\ 0.6, & 1 < x \leq 2, \\ 0.7, & 2 < x \leq 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Замечание 18. Анализируя вид этого графика, мы видим, что он представляет собой ступенчатую фигуру. Точки разрыва графика совпадают со значениями x_n с.в. ξ, а величина скачка графика в точке разрыва x_n совпадает с вероятностью P_n появления соответствующего значения.

Пример 6. По графику ф.р. дискретной с.в. найти ее распределение.

Решение. В силу значения 18 множество X значений с.в. совпадает с множеством точек разрыва ф.р. $F_\xi(x)$. Таким образом, $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Вероятности значений равны величине скачка графика ф.р. в соответствующей точке. Отсюда

$P\{\xi = -2\} = 0.15$, $P\{\xi = -1\} = 0.3$,

$P\{\xi = 0\} = 0.15$, $P\{\xi = 1\} = 0.2$, $P\{\xi = 2\} = 0.2$.

Пример 7. С.в. ξ имеет абсолютно непрерывное распределение с плотностью

$$\rho_\xi(x) = \begin{cases} cx^2, & x \in [0; 2], \\ 0, & x \notin [0; 2]. \end{cases}$$

Найти:

1) Константу c;

2) Ф.р. $F_\xi(x)$;

3) $P\{1 \le \xi < 3\}$.

Решение. Одним из основных свойств п.р. $\rho_\xi(x)$ с.в. ξ является (см. задачу 10.6) свойство нормировки:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho_\xi(x)\,dx = 1.$$

В нашем случае мы имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho_\xi(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dx + c\int\limits_{2}^{0} x^2\,dx + \int\limits_{0}^{+\infty} dx = 0 + c\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 + 0 = c\cdot\frac{8}{3} = 1.$$

Отсюда получаем $c = \frac{8}{3}$.

Ф.р. F_ξ и п.р. ρ_ξ связаны соотношением (см. задачу 10.6)

$$F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \rho_\xi(y)\,dy.$$

Рассмотрим три случая:

1) $x < 0$.

$F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \rho_\xi(y)\,dy = \int\limits_{-\infty}^{x} 0\,dy = 0.$

2) $0 \le x \le 2$.

$F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0\,dy + \int\limits_{0}^{x} \frac{3}{8}y^2\,dy = \frac{1}{8}x^3;$

3) $x > 2$.

$F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dy + \int\limits_{0}^{2} \frac{3}{8}y^2\,dy + \int\limits_{2}^{x} 0\,dy = 1.$

По определению п.р. с.в. ξ

$$P\{1 \le \xi < 3\} = P\{\xi \in [1;3)\} = \int\limits_{1}^{3} \rho_\xi(y)\,dy = \int\limits_{1}^{2} \frac{3}{8}y^2\,dy + \int\limits_{2}^{3} 0\,dy = \frac{3}{8}\frac{y^3}{3}\Big|_2^1 = \frac{7}{8}.$$

Пример 8. С.в. ξ имеет следующего вида

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x^3, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Найти:

1) П.р. ρ_ξ;

2) $P\{-0.5 \le \xi < 0.5\}$.

Решение. Ф.р. F_ξ и п.р. ρ_ξ связаны соотношением (см. задачу 10.6)

$$\rho_\xi(x) = \frac{d}{dx}F_\xi(x).$$

Подставляя в это соотношение ф.р. F_ξ нашей задачи, получаем

$$\rho_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 3x^2, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Одним из свойств ф.р.F_ξ является следующее:

$$P\{a < \xi \le b\} = F_\xi(b) - F_\xi(a),$$

Отсюда получаем $P\{-0.5 \le \xi < 0.5\} = 0.5^3 - 0 = 0.125$.

10.1 Доказать следующие свойства распределения с.в. ξ:
1) $\forall B \in \mathcal{B}$, $P_\xi \ge 0$;
2) $P_\xi(R^1) = 1$;
3) если $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{B}$ и $B_i \cap B_j = \emptyset$, $\forall i \ne j$, то
$P_\xi(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P_\xi(B_n)$.

10.2 Доказать следующие свойства ф.р. F_ξ с.в. ξ:
1) $0 \le F_\xi \le 1$, $\forall x \in R^1$;
2) F_ξ не убывает;
3) F_ξ непрерывна слева;
4) $\lim\limits_{x\to-\infty} F_\xi(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} F_\xi(x) = 1$.
5) $P\{a \le \xi < b\} = F_\xi(b) - F_\xi(a)$.

10.3 Ф.р. F_ξ однозначно определяет распределение P_ξ.

Указание. Сначала по ф.р. F_ξ вычислить вероятность попадания в интервал, потом и сумму конечного числа непересекающихся интервалов, далее воспользоваться теоремой о продолжении вероятности.

10.4 Доказать, что любая функция P заданная на $\mathcal{B}$ и обладающая свойствами $1-3$ из задачи 10.1, является распределением некоторой с.в ξ.

10.5 Доказать, что дискретное распределение $(X, \{P_n\})$ обладает свойствами:
1) $P_n \ge 0$;
2) $\sum P_n = 1$;
3) $P\{\xi \in B\} = \sum\limits_{n:x_n\in B} P_n$;
4) $F_\xi(x) = \sum\limits_{n:x_n\in B} P_n$;
5) $P_n = P\{\xi = x_n\} = F_\xi(x_n + 0) + F_\xi(x_n)$.

10.6 Доказать, что п.р. ρ_ξ с.в. ξ обладает свойствами:
1) $\forall x \in R^1$ $\rho_\xi \ge 0$;
2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho_\xi(x)\,dx = 1$;
3) $\rho_\xi(x) = \frac{d}{dx} F_\xi(x)$;
4) $F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} = \rho_\xi(y)\,dy$;
5) $\forall B \in \mathcal{B}$ $P_\xi(B) = \int\limits_B \rho_\xi(x)\,dx$;

в частности
$$P\{a \le \xi < b\} = \int\limits_a^b \rho_\xi(x)\,dx.$$

10.7 Доказать, что действительная функция $\rho(x)$, обладающая свойствами 1-2 из задачи 10.6, является п.р. некоторой с.в. ξ.

10.8 Какие функции являются функциями распределения:

а) $F(x) = \begin{cases} 0, \quad x \le 0, \\ \frac{x}{1+x}, \quad x > 0; \end{cases}$

б) $F(x) = \frac{\pi}{2} + \mathrm{arctg} x;$

в) $F(x) = \begin{cases} 0, \quad x < 0, \\ 2x - x^2, \quad x \in [0;2]; \\ 1, \quad x > 2 \end{cases}$

10.9 Плотность распределения задана формулой
$$\rho_\xi(x) = \begin{cases} Cx^{-3/2}, \quad x \ge 1, \\ 0, \quad x < 1; \end{cases}$$

Найти:

а) постоянную C;

б) плотность распределения $1/\xi$;

в) $P\{0.1 < \eta < 0.2\}$.

10.10 Плотность распределения случайной величины равна $\rho_\xi(x) = cx^2e^{-x}$, $x > 0$.

Найти:

а) значение c;

б) функцию распределения ξ;

в) вероятность попадания случайной величины в отрезок $[0;1]$.

10.11 Определить значения параметров функций, для которых эти функции являются плотностями распределений:

а) $f(x) = \begin{cases} 0, \quad x \notin [a;b], \\ c, \quad x \in [a;b]; \end{cases}$

б) $\varphi(x) = \begin{cases} ax^2 + bx, \quad ax^2 + bx \ge 0, \\ 0, \quad ax^2 + bx < 0; \end{cases}$

10.12 Случайная величина ξ имеет распределение Коши:
$$\rho_\xi(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}.$$
Найти a, такое, что $P\{\xi > a\} = \frac{\pi}{4}$.

10.13 ξ имеет нормальное распределение с параметрами (0;1). Оценить вероятности:

а) $P\{|\xi| > 2\}$;

б) $P\{\xi \in (1;2)\}$;

в) $P\{\xi < -3\}$.

10.14 Случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 1$. Вычислить вероятности:

а) $P\{\xi > 1\}$;

б) $P\{\xi > 2/\xi > 1\}$;

в) $P\{\xi > 2/\xi > 3\}$.

10.15 Случайная величина ξ имеет треугольное распределение с параметрами (a, b). Определить: а) величину ; б) $P\{\xi > 0\}$.

10.16 В круглое озеро радиуса 1 км падает камень. Найти функцию и плотность распределения удаления точки падения от берега.

10.17 В прямоугольный пруд $a \times b$ км падает камень. Найти функцию и плотность распределения удаления точки падения от берега.

10.18 Найти распределение числа карасей среди 10 пойманных рыб, если каждый раз с вероятностью 1/5 пойманная рыбка — карась.

10.19 Двое договорились встретиться между часом и двумя. Найти плотность распределения времени ожидания пришедшего первым.

10.20 Клад находится в одном из двенадцати стульев. Найти распределение числа просмотренных стульев до обнаружения клада.

10.21 Палочка длиной l случайно ломается. Найти функцию распределения длины меньшей части.

10.22 Окружность с точкой A катится по плоскости. Найти функцию распределения расстояния точки A до плоскости сегодня в полночь.

10.23 Найти функцию распределения проекции радиуса-вектора случайной точки окружности радиуса P на диаметр окружности.

10.24 Из колоды 36 карт вынимаются 3. Найти функцию распределения числа красных карт среди вынутых.

10.25 Подбрасываются две игральные кости. Найти распределение произведения выпавших очков.

10.26 На отрезок $[0; 1]$ случайно падают две точки. Найти плотность распределения расстояния между ними.

10.27 n случайных точек разбивают отрезок на $n + 1$ отрезков. Доказать, что их длины одинаково распределены.

10.28 $\psi(x)$ функция распределения случайной величины ξ. Найти функцию распределения случайной величины $\eta = \mathrm{sign}\xi$.

10.29 $f(x)$ — плотность распределения случайной величины ξ. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = |\xi|$.

10.30 Случайная величина ξ имеет показательное распределение. Найти распределение $\xi - a$.

10.31 Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[0; 1]$. Найти распределение $a\xi + b$.

10.32 Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[0; 1]$. Найти функцию распределения случайных величин:

а) $\xi + 1$;
б) ξ^2;
в) e^{ξ}.

10.33 ξ — время безотказной работы компьютера, который начинаем работать в нулевой момент времени. Условная вероятность того, что компьютер не выйдет из строя на интервале времени $[t, t + \triangle t]$ если он не выходил из строя до этого времени, равна $\lambda(t)\triangle t + 0(\triangle t)$. Доказать, что функция распределения имеет вид

$$F(t) = 1 - \exp\{-\int\limits_0^t \lambda(u)\, du\}.$$