§5. УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ. НЕЗАВИСИМОСТЬ СОБЫТИЙ

Когда мы вычисляем вероятность случайного события, то всегда неявно подразумеваем, что эксперимент проводится в определенных условиях. Если эти условия меняются, то изменится и вероятность случайного события в этих условиях. Для строго математического описания подобной ситуации и вводится понятие условной вероятности. Изменение условий проведения эксперимента обычно можно описать с помощью задания некоторых дополнительных ограничений. Выполнение этих ограничений также есть некоторое событие. Таким образом, основным понятием является понятие условной вероятности A при условии, что произошло некоторое событие B.

Определение. Условной вероятностью события A при условии, что произошло событие B, называется число

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Это определение корректно, если $P(B) \neq 0$.

Пример 1. В урне 5 белых и 4 чёрных шара. Без возвращения вынимают два шара. Известно, что первый шар белый. Какова вероятность того, что и второй шар белый?

Решение. В этой задаче событие A–второй шар белый, событие B–первый шар белый. По классическому определению вероятности легко вычисляется, что $P(B) = \frac{5}{9}$, а $P(AB) = \frac{20}{72}$. Тогда

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{20 \cdot 9}{72 \cdot 5} = \frac{1}{2},$$

что согласуется с интуитивно ожидаемым ответом.

Из определения условной вероятности легко следует следующая

Теорема умножения. Если A и B–случайные события, $P(B) \neq 0$, то

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A).$$

Следствие. Если $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$–случайные события, то

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_n/A_1 \ldots A_{n-1}).$$

Теорема умножения и ее следствие полезны при вычислении вероятностей в так называемых многоступенчатых экспериментах, когда эксперимент можно разбить на несколько упорядоченных этапов (из урны последовательно вынимаем шары, несколько раз подбрасываем монету или кубик и т. п.), причем условные вероятности появления того или иного события на очередном этапе можно вычислить непосредственно без обращения к определению.

Пример 2. В урне 5 белых и 4 черных шара. Без возвращения вынимают три шара. Какова вероятность того, что первый шар белый, второй–черный, и третий–опять белый?

Решение. Обозначим через A_1 событие, состоящее в том, что первый шар белый, A_2–второй шар черный, A_3–третий шар белый. Необходимо вычислить $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$. Используя следствие из теоремы умножения, имеем

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2).$$

Непосредственно из условий проведения эксперимента по классическому определению вероятности получаем

$$P(A_1) = \frac{5}{9},\ P(A_2/A_1) = \frac{4}{8},\ P(A_3/A_1A_2) = \frac{4}{7}.$$

Тогда

$$P(A_1A_2A_3) = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{10}{63}.$$

Определение. События A и B называются независимыми, если $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

События $A_1,\ \ldots,\ A_n$ называются независимыми в совокупности, если $\forall k \geq 2$, для любого набора индексов $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$

$$P\left(A_{i_1} \ldots A_{i_k}\right) = P\left(A_{i_1}\right) \cdot \ldots \cdot P\left(A_{i_k}\right).$$

Пример 3. Симметричную монету подбросили два раза. Событие A означает, что монета выпала оба раза одинаковыми сторонами, событие B–в первый раз выпал "орёл". Будут ли события A и B независимыми?

Решение. Используя классическое определение вероятности, находим
$$P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},\ P(B)=\frac{1}{2},\ P(AB)=\frac{1}{4}.$$
Тогда
$$P(AB)=\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=P(A)\cdot P(B),$$
то есть события A и B независимы.

Независимость событий используют при вычислениях вероятностей в тех же случаях, что и общая теорема умножения. В этом случае независимость либо оговаривается условиями задачи, либо следует из условий проведения эксперимента.

Пример 4. В урне 5 белых и 4 чёрных шара. С возвращением вынимают два шара. Какова вероятность того, что они оба белые?

Решение. Пусть A_1–событие, означающее, что первый шар белый, A_2–второй шар белый. Так как выбор производится с возвращением, то результат первого выбора никак не влияет на результат второго выбора. В силу этого A_1 и A_2 можно считать независимыми. Откуда вероятность того, что оба шара белые, равна
$$P(A_1A_2)=P(A_1)\cdot P(A_2)=\frac{5}{9}\cdot\frac{5}{9}=\frac{25}{81}.$$

Чаще всего теорема умножения для независимых событий применяется в сочетании с теоремой сложения.

Пример 5. Два игрока по очереди бросают симметричную монету (каждый–не более двух раз). Выигрывает тот, у кого впервые выпадет "герб". Какова вероятность того, что выигрывает тот, кто начинает первым?

Решение. Пусть A_i–событие, означающее, что в i-ом испытании выпал "герб", B–выиграл первый игрок:
$$B=A_1+\bar{A}_1\bar{A}_2A_3.$$

Очевидно, что испытания можно считать независимыми, тогда в силу теоремы сложения и независимости
$$P(B)=P(A_1)+P\left(\bar{A}_1\right)P\left(\bar{A}_2\right)P(A_3)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{8}.$$

- 5.1. Подбрасывают две симметричные монеты. Известно, что выпал только один "герб". Какова вероятность того, что "герб"на первой монете?
- 5.2. Из набора чисел 1, 2, 3, 4 без возвращения выбирают два. Известно, что их сумма равна 5. Какова вероятность того, что первое число равно 2?
- 5.3. Из набора чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6 выбирают одно число. Известно, что это число ≤ 4. Какова вероятность того, что это число ≥ 3?
- 5.4. Подбрасывают две симметричные монеты. Известно, что на первой выпал "герб". Какова вероятность того, что и на второй монете выпал "герб"?
- 5.5. Подбрасывают симметричную игральную кость. Известно, что выпало чётное число очков. Какова вероятность того, что число очков равно 3?
- 5.6. В партии из 8 деталей 2 бракованные. Выбрали без возвращения две детали. Известно, что одна из них бракованная. Какова вероятность того, что это первая деталь?
- 5.7. Подбрасывают две симметричные монеты. Известно, что они выпали одинаковыми сторонами. Какова вероятность того, что на первой монете выпал "герб"?
- 5.8. Из множества чисел 1, 2, 3, 4 выбрали без возвращения два числа. Известно, что первое число больше второго. Какова вероятность того, что первое число равно 2?
- 5.9. В урне с одинаковой вероятностью может быть либо два белых, либо белый и чёрный шары. При вынимании шара вынули белый шар. Какова вероятность того, что в урне два белых шара?

- 5.10. В игре с равной вероятностью могут использоваться либо одна, либо две кости. В обоих вариантах отмечают общее число выпавших очков. Вы слышите, что выпало два очка. Какова вероятность того, что играли одной костью?

- 5.11. Студент знает 20 вопросов из 25 вопросов программы. В билете 3 вопроса. Какова вероятность того, что студент ответит на все вопросы?

- 5.12. Из урны, содержащей 3 белых шара, 5 чёрных и 2 красных, два игрока поочерёдно извлекают по одному шару без возвращения. Выигрывает тот, кто первым вынет белый шар. Если появляется красный шар, то объявляется ничья. Пусть событие A означает, что выигрывает игрок, начавший игру, B–выигрывает второй участник, C–игра закончилась вничью. Найти вероятности этих событий.

- 5.13. Стрелок A поражает мишень при некоторых условиях стрельбы с вероятностью $p = 0,6$; стрелок B–с вероятностью $p = 0,5$. Стрелки дали залп по мишени. Какова вероятность того, что мишень будет поражена?

- 5.14. Бросаются одновременно 2 игральных кости. Найти вероятность того, что произведение выпавших очков будет чётным.

- 5.15. Сколько раз нужно бросить игральную кость, чтобы появление 6 очков имело вероятность: а) большую 0,5; б) большую 0,8; в) большую 0,9?

- 5.16. Производится три независимых выстрела по мишени, состоящей из "яблочка"и двух концентрических колец. При одном выстреле вероятность попадания в "яблочко,12; в первое кольцо–0,15; во второе кольцо–0,18. Найти вероятность того, что в результате стрельбы будет два попадания в "яблочко"и одно–в первое кольцо.

- 5.17. Два игрока по очереди бросают игральную кость. Выигрывает тот, кто в очередной паре бросаний получит большее число очков (впервые). Какова вероятность того, что выигрывает первый игрок?

- 5.18. Симметричную монету подбрасывают до первого появления "герба". Какова вероятность того, что потребуется чётное число бросаний?

- 5.19. Предположим, что для одной торпеды вероятность потопить корабль равна 0,5. Какова вероятность того, что 4 торпеды потопят корабль, если для потопления корабля достаточно одного по падания в цель?

- 5.20. В ящике 10 красных и 6 синих пуговиц. Вынимаются наудачу две пуговицы. Какова вероятность того, что пуговицы будут одноцветными?

- 5.21. Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным хотя бы одному из чисел 2 или 5.

- 5.22. Бросают 4 игральных кости. Найти вероятность того, что на всех выпадет одинаковое число очков.

- 5.23. В жюри из трёх человек два члена независимо друг от друга принимают правильное решение с вероятностью p, а третий для принятия решения бросает симметричную монету. Окончательное решение принимается большинством голосов. С другой стороны, некий судья принимает правильное решение с вероятностью p. Кто с большей вероятностью принимает правильное решение: жюри или судья?

- 5.24. События A и B независимы. Доказать, что следующие пары событий независимы: а) $\bar{A}$ и B; б) A и $\bar{B}$; в) $\bar{A}$ и $\bar{B}$.

- 5.25. $P(A) = P$, $P(B) = 1 - \varepsilon$, где ε–мало. Оценить $P(A/B)$ сверху и снизу.

- 5.26. $P(A) = 0,9$; $P(B) = 0,8$. Доказать, что $P(A/B) \geq 0,875$.

- 5.27. Доказать, что

$$P(A_2/A_1) \geq 1 - \frac{P(\bar{A}_2)}{P(A_1)}.$$

- 5.28. Известно, что события A и B независимы и не пересекаются. Найти $\min(P(A), P(B))$.

- 5.29. Пусть события A и B_1, и A и B_2–попарно независимы, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Тогда события A и $B_1 + B_2$–независимы. Показать, что в общем случае, то есть для совместных B_1 и B_2, это неверно.

- 5.30. Студент разыскивает книгу в 3 библиотеках. Для каждой библиотеки одинаково вероятно есть книга в фонде библиотеки или её нет. Если книга есть, то она может быть с вероятностью $\frac{1}{2}$ занята. Какова вероятность того, что студент достанет книгу?

- 5.31. В условиях предыдущей задачи выяснить, при каком минимальном числе библиотек вероятность достать книгу не менее 0,9.

§6. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ФОРМУЛЫ БАЙЕСА

Часто мы встречаемся с такой ситуацией, когда случайный эксперимент может проводиться при различных условиях, каждое из которых также реализуется случайно. Таким образом, мы имеем своеобразный двухступенчатый случайный эксперимент, когда на первом этапе мы устанавливаем, в каких условиях будет проводиться случайное испытание. Формально набор различных условий проведения эксперимента определяется в виде понятия полной группы событий.

Определение. События $H_1,\ H_2,\ \ldots,\ H_n$ называются полной группой событий (разбиением пространства Ω), если

$$\begin{aligned} &1)\quad H_i \cap H_j = \emptyset,\ \forall i \neq j; \\ &2)\quad H_1 + H_2 + \ldots + H_n = \Omega. \end{aligned}$$

Появление события H_i означает, что реализовался определённый комплекс условий проведения эксперимента из имеющегося набора.

Пусть A–некоторое случайное событие, условные вероятности появления которого при выполнении каждого из заданного набора условий, а также вероятности реализации каждого из условий известны. Необходимо определить вероятность события A в "полном"эксперименте. В этом случае очень полезно следующее.

Теорема 1. Пусть $H_1,\ H_2,\ \ldots,\ H_n$ и A–случайные события, причём $H_1,\ H_2,\ \ldots,\ H_n$ образуют полную группу событий, $P(H_i) > 0$, $i = 1,\ \ldots,\ n$. Тогда

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + \ldots + P(H_n)P(A/H_n).$$

Последняя формула называется формулой полной вероятности.

Пример 1. Пусть мы имеем две урны с шарами. В первой урне 6 белых и 2 чёрных шара, во второй–3 белых и 5 чёрных шаров. Случайно отбирается одна урна, и из неё вынимают один шар. Какова вероятность того, что шар белый?

Решение. В описанном эксперименте явно выделены два этапа: сначала выбирают одну из урн, а затем из выбранной урны вынимают шар. Интересующее нас событие (событие A) относится ко второму этапу, но оно явно зависит от результата эксперимента на первом этапе (события H_i). Введём следующие события:

H_1–выбрана первая урна;
H_2–выбрана вторая урна;
A–вынули белый шар.

Нетрудно проверить, что события H_1 и H_2 образуют полную группу событий. Действительно, вместе события H_1 и H_2 появиться не могут ($H_1 \cap H_2 = \emptyset$), и какая-то из двух урн обязательно будет выбрана ($H_1 + H_2 = \Omega$). Так как случайный отбор подразумевает равновероятность, то $P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}$. По классическому определению вероятности находим $P(A/H_1) = \frac{6}{8}$, $P(A/H_2) = \frac{3}{8}$. Окончательно по формуле полной вероятности находим

$$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} = \frac{9}{16}.$$

Рассмотрим теперь в некотором смысле обратную задачу. Пусть описанный выше эксперимент проведён, и появится некоторое событие A. Какова вероятность того, что был реализован комплекс условий, соответствующий событию H_k, то есть вероятность $P(H_k/A)$?

Теорема 2. Пусть $H_1,\ H_2,\ \ldots,\ H_n$–полная группа событий, A–случайное событие, $P(H_i) > 0$, $i = 1,\ \ldots,\ n$. Тогда

$$P(H_k/A) = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{P(A)} = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)}.$$

Последнее выражение называется формулой Байеса. Эта формула и её обобщения часто применяются в математической статистике.

Пример 2. В условиях предыдущего примера был вынут белый шар. Какова вероятность того, что этот шар вынут из первой урны?

Решение. В тех же обозначениях, что и в первом примере, находим по формуле Байеса:

$$P(A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{8}}{\frac{9}{16}} = \frac{2}{3}.$$

- 6.1. В первом ящике 20 деталей, из них 15 стандартных, во втором–30 деталей и 24 стандартных, в третьем–10 деталей и 6 стандартных. Найти вероятность того, что случайным образом извлечённая деталь из наугад взятого ящика стандартна.

- 6.2. В телевизионном ателье 4 кинескопа. Вероятности того, что кинескопы выдержат гарантийный срок службы, соответственно равны 0,8; 0,85; 0,9; 0,95. Найти вероятность того, что наудачу взятый кинескоп выдержит гарантийный срок службы.

- 6.3. В ящик, содержащий 3 одинаковых детали, положена стандартная деталь, а затем случайно взята одна деталь. Какова вероятность того, что эта деталь стандартная, если считать равновозможными все предположения о числе стандартных деталей среди первых трёх?

- 6.4. В двух ящиках имеются радиолампы. В первом ящике–12, из них–одна нестандартная, во втором–10, из них–одна нестандартная. Из первого ящика наудачу взята одна лампа и положена во второй. Найти вероятность того, что случайно выбранная радиолампа из второго ящика будет стандартной.

- 6.5. На склад поступила продукция трёх фабрик. Продукция с первой фабрики составила 20%, со второй–46%, с третьей–34%. Известно, что средний процент нестандартных изделий первой фабрики равен 3, второй–2, третьей–1. Найти вероятность того, что наугад взятое изделие оказалось нестандартным. Найти вероятность того, что это изделие поступило с первой фабрики.

- 6.6. Некто, заблудившись в лесу, вышел на поляну, откуда вело 5 дорог. Известно, что для различных дорог вероятности выхода из леса за час соответственно равны 0,6; 0,3; 0,2; 0,1; 0,1. Определить вероятность того, что заблудившийся, случайно выбирая дорогу, пошёл по первой дороге, если он вышел из леса через час.

- 6.7. Вероятность того, что изделие удовлетворяет стандарту, равна 0,96. Предложена упрощённая проверка на стандартность, в результате чего вероятность признать стандартную деталь стандартной равна 0,98, а нестандартные признать стандартными–0,05. Найти вероятность того, что деталь действительно стандартная, если она признана стандартной.

- 6.8. Предположим, что 5% всех мужчин и 0,25% всех женщин–дальтоники. Если мужчин и женщин одинаковое количество, то какова вероятность того, что выбранное лицо–мужчина, если это дальтоник?

- 6.9. 60% учащихся в школе–мальчики. 80% мальчиков и 75% девочек имеют билеты на школьный вечер. Кто-то потерял билет. Какова вероятность того, что это мальчик?

- 6.10. На трёх дочерей–Алису, Бетти и Шарлотту в семье возложена обязанность мыть тарелки. Поскольку Алиса старшая, ей приходится выполнять 40% всей работы, а Бетти и Шарлотта выполняют по 30% работы. Для Алисы вероятность разбить тарелку–0,02, для Бетти и Шарлотты эта вероятность равна 0,03 и 0,02 соответственно. Мама слышит, что кто-то разбил тарелку. Какова вероятность того, что посуду мыла Бетти?

- 6.11. Случайно выбирают одну из двух игральных костей. На одной цифры: 1, 2, 3, 4, 5, 6, а на другой–1, 2, 3 (на противоположных гранях одинаковые цифры). Кость бросили два раза и выпали две 1. Какова вероятность того, что это вторая кость?

- 6.12. Бросаем монету. Если она выпадет "гербом", то выбираем шар из первой урны, а если "цифрой", то–из второй урны. В первой урне 3 чёрных и 1 белый шар, во второй–1 чёрный и 3 белых шара. В результате такого эксперимента появился белый шар. Какова вероятность того, что монета выпала "цифрой"?

- 6.13. Страховая компания разделяет водителей на три класса: A (мало рискует), B (средне рискует), C (сильно рискует). Компания считает, что у неё застраховано 30% из класса A, 50% из класса B и 20% из класса C по отношению к общему числу застрахованных. Для класса A вероятность попасть в катастрофу в течение года равна 0,01; для класса B–0,03; для класса C–0,1. Министр Джонс страхует машину и в течение года попадает в аварию. Какова вероятность того, что он сильно рискует?

- 6.14. На некоторой фабрике 40% всей продукции производит машина A, и 60%–машина B. Машина A производит в среднем 9 бракованных изделий на каждую тысячу, а машина B–1 бракованное изделие на 250. Выбранные изделия оказались бракованными. Какова вероятность того, что они изготовлены машиной A?

- 6.15. Имеются два ящика, в первом из которых находится 2 белых, 3 красных и 20 чёрных шаров, во втором–8 белых, 15 красных и 2 чёрных шара. Вынули по шару из каждого ящика, причём сначала появился белый шар, а потом чёрный. Какова вероятность того, что сначала шар вынимали из первого ящика, а потом–из второго, если оба порядка равновероятны?

- 6.16. Вероятность того, что близнецы одного пола вдвое больше, чем разного пола. Вероятность рождения мальчика равна 0,5. Какова вероятность того, что второй из близнецов–мальчик, если первый–мальчик?

- 6.17. В урне три шара, которые могут быть белыми и чёрными. Разные предположения о числе белых шаров равновероятны. С возвращением вынули 4 шара и получили такой результат: чёрный, белый, белый, белый. Какова вероятность того, что в урне два белых шара?

- 6.18. В группе спортсменов 20 лыжников, 6 велосипедистов и 4 бегуна. Вероятность выполнить квалификационную норму равна: для лыжника–0,9; для велосипедиста–0,8; для бегуна–0,75. Найти вероятность того, что спортсмен, вызванный наугад, выполнит норму.

- 6.19. Сборщик получил 3 коробки деталей с первого завода и 2 коробки–со второго завода. Вероятность того, что деталь с первого завода стандартна, равна 0,8, для второго завода эта вероятность равна 0,9. Найти вероятность того, что извлечена бракованная деталь.

- 6.20. Стрелок A попадает в цель с вероятностью 0,9, стрелок B–с вероятностью 0,7 и стрелок C–с вероятностью 0,1. Кто-то один из них выстрелил. С какой вероятностью цель поражена?

- 6.21. В условиях предыдущей задачи известно, что цель поражена. Какова вероятность того, что стрелял стрелок C?

- 6.22. Любой студент одинаково вероятно может быть вызван к доске. В группе 23 студента и 2 студентки. Какова вероятность того, что к доске пойдёт студентка, если а) в группе отсутствует 1 человек;

б) в группе отсутствуют 2 человека?

- 6.23. В студенческом отряде две бригады первокурсников и одна бригада второкурсников. В каждой бригаде первокурсников 5 юношей и 3 девушки, а в бригаде второкурсников 4 юношей и 4 девушки. По жеребьёвке из отряда выбрали одну из бригад, и из неё–одного человека для поездки в город.

  Какова вероятность того, что выбрали юношу?

  Известно, что в город ездил юноша. Какова вероятность того, что он первокурсник?

- 6.24. В группе из 20 стрелков имеются 4 отличных, 10 хороших и 6 посредственных стрелков. Вероятность попадания в цель при одном выстреле для отличного стрелка равна 0,9; для хорошего–0,7; для посредственного–0,5. Найдите вероятность того, что наудачу выбранный стрелок попадёт в цель.

- 6.25. Остап Бендер достаёт очередной гарнитур из 12 стульев. Вероятность того, что в этом гарнитуре спрятан клад, равна P. После вскрытия первых одиннадцати стульев клад не обнаружен. Какова вероятность того, что он есть в двенадцатом стуле?

- 6.26. Три узника A, B и C ждут освобождения. Им стало известно, что двоих из них на следующий день освободят. A хочет узнать, кого освободят, но не хочет спрашивать о себе. Охранник сказал, что освободят B. Какова вероятность того, что освободят B? Какова вероятность того, что освободят и A, если все три узника одинаково хороши?

- 6.27. Один властелин, которому наскучил его звездочёт со своими ложными предсказаниями, решил казнить его. Однако, будучи добрым повелителем, он решил дать звездочёту последний шанс. Ему велено распределить по двум урнам 4 шара: 2 чёрных и 2 белых. Палач выберет наугад одну из урн и из неё будет тащить шар. Если будет вынут чёрный шар, то звездочёта казнят, иначе милуют. Как разместить шары в урнах, чтобы обеспечить максимальную вероятность быть спасённым?

- 6.28. Из урны, содержащей 6 белых и 4 красных шара, потеряно 3 шара одинакового цвета. С какой вероятностью после этого из урны будет извлечён белый шар?

- 6.29. Студент знает не все экзаменационные билеты. Сравнить вероятности вытаскивания "плохого"билета, если идти первым, вторым, последним.

- 6.30. На столе 20 экзаменационных билетов, из них 5 "плохих". Второй студент взял "хороший"билет. Какова вероятность того, что первый студент вытащил

  а) "хороший"билет;

  б) "плохой"билет?

- 6.31. Задача о разорении. У игрока A–a рублей, у игрока B–b рублей. В каждой партии проигравший отдаёт 1 рубль партнёру. Какова вероятность разориться игроку A, если

  а) игроки равносильные;

  б) игрок A в каждой партии выигрывает с вероятностью p?

- 6.32. Из урны, содержащей белые и чёрные шары (всего 4 штуки), наудачу вынуты два шара–белый и чёрный. Какой состав урны наиболее вероятен?

- 6.33. Из урны, содержащей 6 белых и 4 чёрных шара, переложили наудачу 2 шара в урну с 4 белыми и 4 чёрными шарами. Какова вероятность после этого вынуть белый шар из второй урны?

- 6.34. В коробке было 2 белых и 2 красных шарика. 3 шарика потеряно. Какова вероятность того, что остался красный шар?

- 6.35. Руководитель группы не ошибается с вероятностью 0,9, остальные члены группы–с вероятностью 0,8. В группе 10 человек, и решение принимается большинством голосов. Найти вероятность правильного принятия решения.

§7. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ИСПЫТАНИЙ. СХЕМА БЕРНУЛЛИ. ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Испытания со случайным исходом бывают независимые (подбрасывание монетки, игральной кости, вытаскивание карты с возвращением) и зависимые (вытаскивание карты без возвращения, попытки отгадать забытую цифру телефонного номера).

Независимые испытания с двумя исходами ("данет", "успехнеуспех") и одной и той же вероятностью успеха в каждом испытании называются испытаниями Бернулли. Пусть S_n–число успехов в n испытаниях Бернулли с вероятностью "успеха", равной p, и "неуспеха", равной $q = 1 - p$. Тогда

$$P\{S_n = k\} = C_n^k p^k q^{n-k} \ (k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n). \tag{1}$$

$$P\{k_1 \le S_n \le k_2\} = \sum_{i=k_1}^{k_2} C_n^i p^i q^{n-i} \ (0 \le k_1 < k_2 \le n).$$

Распределение (1) называется биномиальным распределением.

Например, пусть изделие имеет брак с вероятностью 0,4, тогда в коробке с пятью изделиями содержатся три бракованных изделия с вероятностью

$$P\{S_5 = 3\} = C_5^3 \cdot (0,4)^3 \cdot (0,6)^2 = 0,2304.$$

При большом числе испытаний формулы для подсчёта вероятностей в испытаниях Бернулли "трудносчитаемы". В этих случаях пользуются приближёнными формулами, вытекающими из теорем Пуассона и Муавра–Лапласа.

Пусть теперь в каждом независимом испытании возможны m исходов: $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_m$; P_i–вероятность наступления исхода A_i в одном испытании ($P_1+P_2+\ldots+P_m=1$); ξ_i–число наступлений исхода A_i в n испытаниях. Тогда вероятность иметь

n_1 раз исход A_1,
n_2 раз исход A_2,
....
n_m раз исход A_m

$(n_1+n_2+\ldots+n_m=n)$ есть

$$P_n\{\xi_1=n_1,\ \ldots,\ \xi_m=n_m\}=\frac{n!}{n_1!\cdot\ldots\cdot n_m!}p_1^{n_1}\cdot\ldots\cdot p_m^{n_m}. \qquad (2)$$

Распределение (2) называется <u>полиномиальным распределением</u>.

Например, допустим, что каждый пассажир с вероятностью 0,5 выбирает первый вагон, с вероятностью 0,2–второй и с вероятностью 0,3–третий в поезде из трёх вагонов. В поезде 10 пассажиров. Тогда вероятность того, что в первых двух вагонах едут по 4 пассажира равна

$$P_{10}\{\xi_1=4,\ \xi_2=4,\ \xi_3=2\}=\frac{10!}{4!\cdot4!\cdot2!}\cdot(0,5)^4\cdot(0,2)^4\cdot(0,3)^2\approx0,03.$$

Если речь идёт о зависимых испытаниях, то для определения вероятности наступления определённой последовательности некоторых исходов $B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_n$ применяется теорема умножения:

$$P(B_1B_2\ldots B_n)=P(B_1)\cdot P(B_2/B_1)\cdot P(B_3/B_1B_2)\cdot\ldots\cdot P(B_n/B_1\ldots B_{n-1}).$$

- 7.1. Игральная кость подбрасывается два раза. Какова вероятность того, что ровно один раз появится шестёрка?
- 7.2. Монетка подбрасывается пять раз. Какова вероятность того, что ровно три раза выпадет "цифра"?
- 7.3. Пять монет упали на пол. Какова вероятность того, что ровно три монеты упали "цифрой"кверху?
- 7.4. Какова вероятность того, что при трёх подбрасываниях монеты первый раз выпадет "орёл", второй–"решка"и третий–снова "орёл"?

- 7.5. Из колоды (36 игральных карт) последовательно с возвращением наудачу вытаскивается карта. Найти вероятность того, что из трёх раз два раза появится десятка.
- 7.6. Какова вероятность того, что при пяти бросаниях игральной кости ни разу не выпадет шестёрка?
- 7.7. Игральная кость подбрасывается пять раз. Какова вероятность того, что шестёрка появится ровно два раза, причём в первом и в последнем подбрасываниях?
- 7.8. Бросаются пять монет. Какова вероятность того, что хотя бы один раз выпал "герб"?
- 7.9. Пять раз будут подброшены три монеты. Какова вероятность того, что хотя бы один раз выпадут сразу три "герба"?
- 7.10. Монета бросается три раза. Какова вероятность того, что первый раз выпадет "орёл"?
- 7.11. Монета бросается пять раз. Какова вероятность того, что "орёл"выпадет только при первом, третьем и пятом бросаниях?
- 7.12. Проблема Джона Смита. 1693 г. Одинаковы ли шансы на успех у трёх человек, если первому надо получить хотя бы одну шестёрку при бросании игральной кости 6 раз, второму–не менее двух шестёрок при 12 бросаниях, а третьему–не менее трёх шестёрок при 18 бросаниях?
- 7.13. Монета подбрасывается пять раз. С какой вероятностью число выпадений "орла"будет чётным?
- 7.14. В окружность вписан квадрат. Случайным образом в окружность бросаются три точки. Какова вероятность того, что две из них попадут в квадрат?
- 7.15. Три игральные кости подбрасываются пять раз. Найти вероятность того, что ровно три раза выпадет по три единицы.

- 7.16. На двух страницах пять опечаток. Каждая опечатка независимо от других может находиться на любой из этих страниц. Какова вероятность того, что на первой странице только одна опечатка?

- 7.17. У самолёта четыре двигателя. Каждый двигатель выходит из строя независимо от других с вероятностью 0,1. Самолёт может лететь при одном работающем двигателе. Какова вероятность катастрофы?

- 7.18. В аудитории шесть лампочек. Каждая может при включении перегореть с вероятностью $\frac{1}{4}$. Считается, что аудитория не пригодна для занятий, если горит меньше четырёх лампочек. Какова вероятность того, что после включения света аудитория будет пригодна для занятий?

- 7.19. В группе 20 студентов. С какой вероятностью пятеро из них родились весной? (Вероятность человеку появиться на свет весной равна $\frac{1}{4}$).

- 7.20. Бросаются три монеты. Какова вероятность того, что они выпали на одинаковые стороны (все–"гербы"или все–"цифры")?

- 7.20.1. Что вероятнее, выиграть у равносильного противника

  а) 3 партии из 4 или 5 из 8;

  б) не менее 3 партий из 4 или не менее 5 из 8;

  в) не более n из $2n$ партий или более n из того же числа партий;

  г) не более n из $2n + 1$ партий или более n из того же числа партий?

- 7.21. Найти вероятность выпадения одной или более двойных шестёрок при 24 бросаниях двух игральных костей.

- 7.22. Одинаковы ли шансы на успех получить хотя бы одну шестёрку при подбрасывании игральной кости 6 раз или не менее двух шестёрок при 12 подбрасываниях?

- 7.23. Две монеты вместе подбрасываются двадцать раз. Найти вероятность того, что хотя бы в одном подбрасывании появятся два "герба".
- 7.24. Вероятность попасть в цель при одном выстреле равна 0,4. Какова вероятность поразить цель при пяти выстрелах?
- 7.25. Стрелок попадает в цель с вероятностью 0,7. Найти распределение числа промахов при четырёх выстрелах.
- 7.26. Стрелок поражает цель одним выстрелом с вероятностью 0,6. Сколько необходимо предусмотреть выстрелов, чтобы с вероятностью не менее 0,99 поразить цель?
- 7.27. Сколько раз нужно подбросить монету, чтобы с вероятностью не менее 0,6 хотя бы раз выпал "герб"?
- 7.28. Какое минимальное число раз нужно подбросить монету, чтобы с вероятностью не менее $\frac{1}{2}$ "орёл"выпал не менее двух раз?
- 7.29. Сколько нужно положить изделий в коробку, чтобы в ней с вероятностью не менее 0,9 было 10 хороших изделий, если с вероятностью 0,8 изделие бракованное?
- 7.30. Изделие может быть бракованным с вероятностью 0,1. Какое минимальное количество изделий нужно взять, чтобы с вероятностью не менее 0,99 иметь хотя бы одно качественное изделие?
- 7.31. Для того, чтобы узнать, сколько рыб в озере, отлавливают 1000 рыб, метят их и выпускают обратно в озеро. При каком числе рыб в озере будет наибольшей вероятность встретить среди пойманных 150 рыб 10 меченых?
- 7.32. Информация, закодированная знаками 1 и 0, передаётся по каналу связи, в котором вероятность искажения одного знака равна 0,4. Для повышения достоверности передачи сообщений

решили каждый знак повторять при передаче трижды и полагать достоверным знак, встречающийся в триаде более одного раза. Насколько возросла вероятность правильной передачи знака?

- 7.33. Бросаются три игральные кости. Найти вероятность того, что на двух из них выпали пятёрка и шестёрка при условии, что на третьей выпала единица.

- 7.34. В каждом пакетике по три шарика. Каждый шарик может быть бракованным с вероятностью p. Событие A состоит в том, что не более одного шарика в пакетике бракованного, событие B– по крайней мере, один шарик бракованный. При каких p события A и B независимы?

- 7.35. Из колоды (36 игральных карт) последовательно с возвращением вынимается одна карта. Какова вероятность того, что первый раз король появится при третьем вытаскивании?

- 7.36. Найти распределение числа подбрасываний монетки до выпадения ровно двух "орлов".

- 7.37. Двое по очереди бросают монету. Выигрывает тот, кто первым получит "герб". Найти вероятности событий:

  а) игра закончится до четвёртого бросания;

  б) выигрывает начавший игру (первый игрок);

  в) выигрывает второй игрок.

- 7.38. В урне 10 шаров: 5 белых и 5 красных. В каждом испытании вынимаются два шара и возвращаются в урну. С какой вероятностью два красных шара будут вынуты первый раз в десятом испытании?

- 7.39. Монета подбрасывается до тех пор, пока не выпадет "герб". Какова вероятность того, что для этого потребуется нечётное число подбрасываний?

- 7.40. Случайным образом выбрано шесть человек. Какова вероятность того, что двое из них родились весной, трое–летом, а один–осенью? Считается, что вероятности появиться на свет зимой, осенью, летом и весной одинаковы.
- 7.41. Какова вероятность того, что при пяти подбрасываниях игральной кости один раз выпадет шестёрка, три раза–тройка и один раз–единица?
- 7.42. Игральная кость подбрасывается десять раз. Какова вероятность того, что два раза выпала двойка, три раза–тройка, четыре–четвёрка и один раз–единица?
- 7.43. Пять пассажиров садятся в трамвай, состоящий из трёх вагонов. Каждый пассажир независимо от других садится в первый вагон с вероятностью 0,5, во второй–с вероятностью 0,2 и в третий–с вероятностью 0,3. Какова вероятность того, что три пассажира сядут в первый вагон, а во второй и в третий вагоны сядет по одному пассажиру?
- 7.44. Какова вероятность того, что при трёх бросаниях игральной кости первый раз выпадет единица, второй–двойка и третий–тройка?
- 7.45. Из колоды карт (36 штук) последовательно вынимаются три карты. С какой вероятностью будут вынуты красные карты, если выборка производится

  а) с возвращением;

  б) без возвращения?
- 7.46. Некто забыл последнюю цифру номера телефона и потому набирает её наудачу. Какова вероятность того, что придётся звонить не более трёх раз, чтобы дозвониться до нужного абонента?
- 7.47. Имеется пять ключей, из которых только один подходит к замку. Найти закон распределения числа проб при открывании замка.

- 7.48. В урне 20 шаров: 15 красных и 5 жёлтых. Без возвращения вынимаются последовательно три шара. Определить вероятность того, что шары будут вынуты в следующем порядке: красный, жёлтый, красный.

- 7.49. В урне 10 шаров: 2 красных, 3 белых и 5 зелёных. Последовательно без возвращения вынимается по одному шару. Какова вероятность того, что красный шар первый раз будет вынут при третьем вытаскивании?

- 7.50. В урне 10 шаров: 5 белых и 5 красных. Без возвращения вытаскивается по одному шару до первого появления красного шара. С какой вероятностью будет вынуто ровно 5 шаров?

- 7.51. В урне 2 шара: один–белый, другой–чёрный. Производятся последовательные испытания с возвращением вынутого шара в урну. Число испытаний неограничено. Какова вероятность в конце концов вынуть белый шар, если после каждой неудачной пробы в урну добавляется ещё один чёрный шар?

- 7.52. В урне пять красных, три жёлтых и два белых шара. Поочерёдно вытаскиваются по два шара с возвращением их в урну. С какой вероятностью в пяти таких извлечениях два раза будут вытащены два белых шара и три раза–два красных?

- 7.53. Урна содержит 3 красных, 4 зелёных и 5 синих шаров. Наудачу без возвращения вынимается один шар. Какова вероятность во второй раз вынуть красный шар?

- 7.54. В урне 4 шара. Четыре раза с возвращением вынимается по одному шару. Найти вероятность того, что все шары будут вынуты по одному разу.

- 7.55. Производится три выстрела по мишени. Вероятность попадания при первом, втором и третьем выстрелах равна 0,1; 0,2; 0,3 соответственно. Найти вероятность того, что в мишени будет хотя бы одна пробоина.

- 7.56. Из колоды (36 игральных карт) четыре раза последовательно с возвращением вытаскивается карта. Найти вероятность того, что три раза подряд появятся карты какой-либо одной масти.

- 7.57. Монетка подбрасывается шесть раз. Какова вероятность того, что "герб"появится ровно три раза, причём подряд–один за другим?

- 7.58. Каждую секунду с вероятностью p независимо от других моментов по дороге проезжает автомашина. Пешеходу для перехода улицы необходимо 3 секунды. Какова вероятность того, что подошедший к дороге пешеход будет ожидать возможности перехода: а) 3 секунды; б) 4 секунды; в) 5 секунд?

- 7.59. Две монеты подбрасываются неограниченное число раз: x–число появлений "герба"на первой монете, y–на второй. Какова вероятность того, что первый раз равенство $x = y$ произойдёт при третьем бросании?

- 7.60. Пусть x–число подбрасываний игральной кости до первого появления шестёрки. Сравнить вероятности:

$$P\{x \leq 20/x > 10\} \text{ и } P\{x \leq 10\}.$$

- 7.61. В схеме испытаний Бернулли p–вероятность исхода 1 и q–вероятность исхода 0. Найти вероятность того, что цепочка 00 появится раньше цепочки 01.

- 7.62. В схеме испытаний Бернулли p–вероятность исхода 1 и q–вероятность исхода 0. Число испытаний неограничено. Какова вероятность того, что когда-нибудь появится исход 1?

- 7.63. В схеме независимых испытаний с вероятностью p появляется 1 и с вероятностью q–0. Число испытаний неограничено. Найти вероятность того, что когда-нибудь появится серия из трёх нулей подряд.

§8. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ БИНОМИАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Если мы имеем схему Бернулли с большим числом испытаний n, то вычисление вероятностей по точной формуле биномиального распределения становится невозможным в силу вычислительных трудностей. В этом случае применяются различные аппроксимации для вероятностей биномиального распределения.

Пусть мы имеем схему Бернулли с параметрами n и p, S_n–число успехов в n испытаниях,

$$S_n^* = \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}}.$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(u)\,du.$$

Локальная теорема Муавра–Лапласа. Если $n \to \infty$, $0 < p < 1$– постоянна, величина $x_{n,m} = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$ ограничена равномерно по m и n $(a \le x_{n,m} \le b)$, то

$$P\{S_n = m\} = \frac{\varphi(x_{n,m}) \cdot (1 + \alpha_n(m))}{\sqrt{npq}},$$

где $|\alpha_n(m)| < \frac{c}{\sqrt{n}}$ при $x_{n,m} \in [a, b]$, $c = c(a, b)$–постоянная.

Интегральная теорема Муавра–Лапласа. Если p, $0 < p < 1$, постоянно, то при $n \to \infty$

$$P\{m_1 \le S_n \le m_2\} = P\{x_{n,m_1} \le S_n \le x_{n,m_2}\} = \Phi(x_{n,m_2}) - \Phi(x_{n,m_1}) + \Delta_n,$$

где $|\Delta_n| \le \frac{p^2+q^2}{\sqrt{npq}}$ равномерно по всем n, m.

Замечание 1. Для функций $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$ составлены таблицы: вместо $\Phi(x)$ чаще используется функция

$$\Phi_0(x) = \int\limits_{0}^{x} \varphi(u)\,du,$$

обладающая следующими свойствами:

$$\begin{array}{ll} 1) & \Phi_0(-x) = -\Phi_0(x); \\ 2) & \Phi_0(x) \to \frac{1}{2} \text{ при } x \to +\infty; \\ 3) & \Phi(x) = \frac{1}{2} + \Phi_0(x). \end{array}$$

Теорема Пуассона. Если $n \to \infty$ и $p \to 0$ так, что $np \to \lambda$, $0 < \lambda < \infty$, то при любом фиксированном $m = 0,\ 1,\ \ldots$

$$P\{S_n = m\} \to P_m(\lambda) = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda},$$

причём $\forall B \subseteq \mathbf{R^1}$, $\forall n \geq 1$, $\forall p$, $0 < p < 1$,

$$\Big| P\{S_n \in B\} - \sum P_m(np) \Big| \leq np^2.$$

Замечание 2. Теорема Пуассона применяется при малых значениях вероятности p, когда локальная теорема Муавра–Лапласа даёт плохое приближение для биномиальных вероятностей. Для вероятностей $P_m(\lambda)$ составлены таблицы.

Замечание 3. Все теоремы приведены с оценками точности аппроксимации. Приближение, вычисляемое по формуле, является приемлемым, если ошибка приближения значительно меньше вычисленного значения.

Пример 1. Симметричную монету подбрасывают 100 раз. Какова вероятность того, что она выпадет "гербом"ровно 50 раз?

Решение. По условиям задачи $n = 100$, $p = 0,5$, $m = 50$.

$$x_{n,m} = \frac{50 - 100 \cdot 0,5}{\sqrt{100 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} = 0, \quad \sqrt{100 \cdot 0,5 \cdot 0,5} = 5.$$

По таблицам находим $\varphi(0) = 0,3989$. Применяя локальную теорему Муавра–Лапласа, получаем

$$P\{S_{100} = 50\} = \frac{0,3989}{5} = 0,08.$$

Пример 2. Симметричную монету подбрасывают 100 раз. Какова вероятность того, что частота появления "герба"будет отклоняться от 0,5 не более, чем на 0,1?

Решение. Нам необходимо вычислить

$$P\left\{\left|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{2}\right|<0,1\right\}.$$

Эту вероятность можно переписать в следующем виде:

$$P\left\{\left|\frac{S_n-\frac{1}{2}\cdot n}{\sqrt{n\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}\right|<\frac{0,1\cdot\sqrt{n}}{0,5}\right\}=P\left\{|S_n^*|<0,2\cdot\sqrt{n}\right\}=$$
$$=P\{-2<S_n^*<2\}.$$

В силу интегральной теоремы Муавра–Лапласа

$$P\{-2<S_n^*<2\}\approx\Phi(2)-\Phi(-2)=\Phi_0(2)-\Phi_0(-2)=2\Phi_0(2).$$

По таблицам находим $\Phi_0(2)=0,4772$ и $2\Phi_0(2)=0,9544$. Таким образом,

$$P\left\{\left|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{2}\right|<0,1\right\}\approx 0,9544.$$

Пример 3. Счётчик Гейгера и источник радиоактивных частиц расположены по отношению друг к другу так, что вероятность частице, вылетевшей из радиоактивного источника, быть зарегистрированной счётчиком равна 10^{-4}. За время наблюдения из источника вылетело $3\cdot 10^4$ частиц. Какова вероятность того, что счётчик зарегистрирует ровно 3 частицы?

Решение. В данном случае $n=3\cdot 10^4$–велико, а $p=10^{-4}$–мало. Поэтому мы предполагаем, что применима теорема Пуассона. По условиям задачи $\lambda=np=3$.

$$P\{S_n=3\}=\frac{\lambda^3}{3!}\cdot e^{-\lambda}=\frac{3^3}{3!}\cdot e^{-3}\approx 0,22404.$$

Точность полученной аппроксимации равна $np^2=3\cdot 10^{-4}$.

Задачи для самостоятельного решения

- 8.1. Пусть мы имеем схему Бернулли с параметрами n и p, $0\le m_1<m_2\le n$. Используя интегральную теорему Муавра–Лапласа,

вычислить вероятности:

$$\begin{array}{lllll}
1. & n=400, & p=0,2, & m_1=90, & m_2=400; \\
2. & n=1200, & p=\frac{3}{7}, & m_1=470, & m_2=510; \\
3. & n=600, & p=0,4, & m_1=210, & m_2=250; \\
4. & n=300, & p=0,25, & m_1=70, & m_2=80; \\
5. & n=200, & p=\frac{1}{3}, & m_1=60, & m_2=70; \\
6. & n=500, & p=\frac{1}{6}, & m_1=80, & m_2=100.
\end{array}$$

- 8.2. Вероятность появления успеха в каждом испытании равна 0,25. Какова вероятность того, что при 300 испытаниях успех наступит: а) ровно 75 раз; б) ровно 85 раз?

- 8.3. В первые классы должно быть принято 200 детей. Определить вероятность того, что среди них окажется 100 девочек, если вероятность рождения мальчика равна 0,515.

- 8.4. Всхожесть семян оценивается вероятностью 0,85. Найти вероятность того, что из 500 высеянных семян взойдёт: а) 425 семян; б) 400 семян; в) 450 семян; г) от 425 до 450 семян.

- 8.5. Какова вероятность того, что в столбике из 100 наугад отобранных монет число монет, расположенных "гербом"вверх, будет от 45 до 55?

- 8.6. Вероятность появления успеха в каждом из 625 независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что частота появления успеха отклонится по абсолютной величине от его вероятности не более, чем на 0,04.

- 8.7. Сколько нужно произвести опытов с бросанием монеты, чтобы с вероятностью 0,92 можно было ожидать отклонение частоты выпадения "герба"от теоретической вероятности 0,5 на абсолютную величину, меньшую 0,01?

- 8.8. Вероятность появления успеха в каждом из 400 независимых испытаний равна 0,8. Найти такое положительное число ε, чтобы с вероятностью 0,9876 абсолютная величина отклонения частоты появления успеха от его вероятности (0,8) не превышала ε.

- 8.9. Вероятность того, что покупателю требуется обувь 41-го размера, равна 0,2. Найдите вероятность того, что среди 100 покупателей потребуют обувь 41-го размера: а) 25 человек; б) от 10 до 30 человек; в) не более 30 человек; г) не менее 35 человек.

- 8.10. С целью эксперимента определения числа π игла брошена 5000 раз и пересекла прямые 2532 раза (Вольф в Цюрихе), при этом $a = 45$, $l = 36$. С какой погрешностью определено число π? Сколько бросаний иглы необходимо сделать, чтобы при $a = l$ вероятность того, что π будет вычислено с погрешностью, не превосходящей 0,001, была равна 0,95?

- 8.11. Проводилась проверка влияния нового лекарства на кровяное давление. При этом оказалось, что в 32 случаях давление после приёма лекарства повысилось, а в 68 случаях–понизилось. Можно ли считать установленным, что это лекарство влияет на кровяное давление? Какова вероятность того, что чисто случайные колебания давления вызовут не меньшее отклонение от 50?

- 8.12. Из таблицы случайных чисел отбирают числа, делящиеся на 3, до тех пор, пока не наберётся 1025 таких чисел. Найти вероятность того, что потребуется таблица, содержащая не менее 2500 чисел.

- 8.13. Театр, вмещающий 1000 человек, имеет два разных входа. Около каждого из входов имеется свой гардероб. Сколько мест должно быть в каждом из гардеробов для того, чтобы в среднем в 99 случаях из 100 все зрители могли раздеться в гардеробе того входа, через который они вошли? Рассмотреть два случая: а) зрители приходят парами; б) зрители приходят поодиночке. Предположить, что входы зрители выбирают с равными вероятностями.

- 8.14. В посёлке 2500 жителей. Каждый из них примерно 6 раз в месяц ездит на поезде в город, выбирая дни поездок по случайным мотивам, независимо от остальных. Какой наименьшей вместительностью должен обладать поезд, чтобы он переполнялся в среднем не чаще одного раза в 100 дней?

- 8.15. Производство даёт 1% брака. Какова вероятность того, что из взятых на исследование 1100 изделий будет выбраковано не более 17?

- 8.16. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,001. Найти вероятность попадания в цель двумя и более выстрелами при одном залпе в 5000 выстрелов.

- 8.17. Рыбак забросил спиннинг 100 раз. Какова вероятность того, что он поймал хотя бы одну рыбу, если одна рыба приходится в среднем на 200 забрасываний?

- 8.18. Книга в 500 страниц содержит 50 опечаток. Оценить вероятность того, что на случайно выбранной странице не менее трёх опечаток.

- 8.19. Известно, что вероятность выпуска сверла повышенной хрупкости (брак) равна 0,02. Свёрла укладываются в коробки по 100 штук. Чему равна вероятность того, что

  а) в коробке не окажется бракованных свёрл;

  б) число бракованных свёрл окажется не более двух?

- 8.20. Сколько изюма в среднем должны содержать калорийные булочки для того, чтобы вероятность иметь в булочке хотя бы одну изюминку была не меньше 0,99?

- 8.21. Вероятность того, что на странице книги могут оказаться опечатки, равна 0,002. Проверяется книга, содержащая 500 страниц. Найти вероятность того, что с опечатками окажутся

  а) 5 страниц;

  б) от 3 до 5 страниц.

- 8.22. По каналу связи передаётся 1000 знаков. Каждый знак может быть искажён независимо от остальных с вероятностью

0,005. Найти вероятность того, что будет искажено не более трёх знаков.