Министерство образования Российской Федерации
Тверской государственный университет
Кафедра математической статистики и эконометрики

# ПРАКТИКУМ ПО КУРСУ "ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА"

Для студентов естественных факультетов
ДО, ВО и ОЗО

**1**

Тверь 2001

**УДК 519.21**

В первом выпуске практикума рассматриваются начальные фундаментальные понятия теории вероятностей: пространство элементарных исходов, события и операции над ними, дискретное вероятностное пространство, простейшие свойства вероятности. Выпуск завершается задачами на классическое определение вероятности и связанными с этим понятием вопросами комбинаторики.

Практикум предназначен для студентов естественных факультетов университета.

Составители: Ю. К. Подставкин, С. Л. Попцов, Ю. С. Хохлов.

## §1. ПРОСТРАНСТВО ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ИСХОДОВ

Построение математической модели случайного эксперимента — вероятностного пространства — мы начинаем с построения пространства (множества) элементарных исходов. Элементарный исход — это некоторое событие, которое даёт описание того, чем закончилось проведение эксперимента. Так как элементарные исходы должны различать различные результаты эксперимента и содержать полную информацию о нём, то множество всех элементарных исходов должно удовлетворять следующим двум свойствам:

1. в отдельном испытании хотя бы один из выбранных элементарных исходов обязательно происходит;

2. в каждом испытании происходит не более одного элементарного исхода.

В дальнейшем пространство элементарных исходов будет обозначаться буквой $\Omega$, а его элементы — $\omega$.

**Пример 1.** Монету подбрасывают один раз. Построить пространство элементарных исходов.

**Решение.** Обозначим через  — событие, состоящее в появлении "герба", а через  — событие, состоящее в появлении "цифры". Эти два события, очевидно, удовлетворяют условиям 1 и 2. Поэтому $\Omega = \{,\}$.

Очень часто случайный эксперимент состоит как бы из нескольких этапов (несколько раз подбрасывают монету или кубик, вынимают несколько шаров из урны и т. п.). В этом случае при построении пространства элементарных исходов нужно учитывать следующие два обстоятельства:

- а) меняются ли условия эксперимента на разных этапах (например, выбор с возвращением или без возвращения);

- б) важен ли порядок следования этапов.

Практический опыт решения задач показывает, что если не оговорено противное, то лучше учитывать порядок следования этапов.

**Пример 2.** Монету подбрасывают $n$ раз. Построить пространство элементарных исходов.

**Решение.** Так как подобная задача часто встречается в различных формулировках, то удобно ввести следующие универсальные обозначения. Пусть $\varepsilon_i = 1$, если при $i$-м подбрасывании появился "герб"и $\varepsilon_i = 0$ в противном случае. Тогда пространство $\Omega$ состоит из всех конечных последовательностей $\omega$ вида $\omega = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$.

**Пример 3.** Из некоторой совокупности, содержащей $N$ предметов, случайным образом отобрали $n$ предметов. Построить пространство элементарных исходов.

**Решение.** Пусть все предметы пронумерованы целыми числами от 1 до $N$. Чтобы решить задачу, необходимо уточнить условия эксперимента:

- а) после выбора предмета он возвращается назад, учитывается порядок выбора предметов. Пусть $\varepsilon_i = k$, если на $i$-м шаге был выбран предмет с номером $k$. Тогда $\Omega$ состоит из элементов вида $\omega = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$;

- б) выбор производится без возвращения, учитывается порядок. В этом случае $\omega = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, но $\varepsilon_i \neq \varepsilon_j$, $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$;

- в) выбор производится без возвращения, порядок не учитывается. Здесь важно только то, какой предмет выбран, а какой нет. Положим $\varepsilon_i = 1$, если предмет с номером $i$ выбран, и $\varepsilon_i = 0$ в противном случае (это совершенно не то, что в случаях а) и б)). Тогда $\Omega$ состоит из элементов вида $\omega = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N)$, $\varepsilon_i = 0$ или 1.

**Пример 4.** Из отрезка $[0, 1]$ случайным образом выбирают точку. Построить пространство элементарных исходов.

**Решение.** В этой задаче в качестве $\omega$ естественно взять то число из $[0, 1]$, которое было выбрано. Тогда $\Omega = [0, 1]$.

Во всех приводимых ниже задачах необходимо построить пространство элементарных исходов.

- 1.1. Монету подбрасывают а) два раза; б) три раза.

- 1.2. Игральный кубик подбрасывают а) один раз; б) два раза.
- 1.3. Из множества чисел 1, 2, 3, 4 выбирают с возвращением два числа.
- 1.4. Подбрасывают монету и игральную кость.
- 1.5. В урне 3 белых и 2 чёрных шара. Без возвращения вынимают два шара.
- 1.6. В первой урне 2 чёрных шара и 1 белый, во второй 1 чёрный и 2 белых. Вынимают по одному шару из каждой урны.
- 1.7. Из цифр 0, 1, 2, 3 составляют двузначное число.
- 1.8. Два человека одновременно "выбрасывают"пальцы на одной руке.
- 1.9. Стрелок стреляет в мишень, состоящую из десяти концентрических кругов.
- 1.10. Случайно выбирают одного человека и выясняют у него а) месяц рождения; б) число и месяц рождения.
- 1.11. Из колоды карт (36 листов) вынимают а) одну карту; б) две карты.
- 1.12. Производится розыгрыш лотереи "Спортлото": а) 6 из 45; б) 5 из 36.
- 1.13. Монету подбрасывают до тех пор, пока впервые не появится "герб".
- 1.14. В лифт 9-этажного дома вошли 5 человек. Нас интересует, на каких этажах они выйдут.
- 1.15. Из последовательности чисел $1, 2, \ldots, N$ отобраны $h$ чисел и расположены в порядке возрастания.

- 1.16. Группа, состоящая из 10 мальчиков и 10 девочек, случайным образом делится на две одинаковые по численности подгруппы.
- 1.17. На полке в случайном порядке расставлено 40 книг, среди которых находится трёхтомник А. С. Пушкина.
- 1.18. Из 28 костей домино случайно выбираются две.
- 1.19. В совокупности из $N$ деталей имеется $M$ бракованных. Случайным образом отбираем $n$ деталей:

  а) с возвращением; б) без возвращения.
- 1.20. Монету подбрасывают до тех пор, пока не выпадет

  а) два "герба"подряд; б) дважды подряд одна сторона.
- 1.21. Три различных шара распределяют по трём ящикам.
- 1.22. Пять шаров распределяют по трём ящикам:

  а) шары разные, ограничений нет;

  б) шары одинаковые, ограничений нет;

  в) шары разные, в каждом ящике есть хотя бы один шар;

  г) шары одинаковые, в каждом ящике есть хотя бы один шар.
- 1.23. Случайным образом отбирают супружескую пару и фиксируют возраст мужа и жены.
- 1.24. В единичном квадрате случайным образом выбирают точку.
- 1.25. На окружности случайным образом выбирают точку.
- 1.26. В круге радиуса $R$ случайным образом выбирают точку.
- 1.27. Плоскость расчерчена параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии $2r$. На такую плоскость случайным образом брошена тонкая игла длины $2l$.

- 1.28. Среди 25 экзаменационных билетов есть 5 "хороших". Два студента по очереди берут билеты.
- 1.29. Поезда в метро идут с интервалами в 1 минуту. Мы приходим в случайный момент времени.
- 1.30. Сначала подбрасывают монету. Если выпадет "герб", то снова подбрасывают монету, в противном случае подбрасывают игральный кубик.
- 1.31. На испытаниях электрическая лампочка горит до тех пор, пока не перегорит.
- 1.32. Два человека $A$ и $B$ договорились встретиться в интервале времени $[0, T]$. Отмечается время прихода каждого из них.

## §2. СОБЫТИЯ И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

В случае дискретного вероятностного пространства случайным событием мы назовём произвольное подмножество $A$ пространства элементарных исходов $\Omega$. Над случайными событиями как множествами можно производить некоторые операции (объединение и т. п.) и получать новые события (определения этих операций и их вероятностную интерпретацию можно найти в любом учебнике). На практических занятиях необходимо научиться формально записывать событие в виде множества по неформальному содержательному описанию; прочитать неформально, что означает сложное событие, образованное с помощью более простых; уметь доказывать свойства операций над событиями.

Напомним, что операция означает объединение попарно несовместных событий.

**Пример 1.** Монету подбрасывают два раза. Дать формальную запись события $A$, состоящего в том, что выпала ровно одна "цифра".

**Решение.**

$$\Omega = \{,,,\};$$

$$A = \{,\}.$$

**Пример 2.** Игральную кость подбрасывают два раза. Событие $A$ состоит в том, что на первой кости выпала чётная цифра, событие $B$ — на второй кости выпала нечётная цифра. Что означают события: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cap \bar{B}$?

**Решение.** Событие $A \cup B$ означает, что либо на первой кости выпала чётная цифра, либо на второй — нечётная; $A \cap B$ — на первой кости выпала чётная цифра, а на второй — нечётная; $A \cap \bar{B}$ — на обеих костях выпали чётные цифры.

**Пример 3.** Доказать, что для любых событий $A$ и $B$ справедливо тождество $A \cup B = A + \bar{A} \cup B$.

**Решение.** Для формального доказательства нам необходимо показать, что справа и слева от знака равенства стоят множества, состоящие из одних и тех же элементарных исходов. Наиболее простой (хотя и не совсем строгий) метод доказательства состоит в применении так называемых диаграмм Венна:

Рис. 1: .

Неформально это тождество читается так: для того, чтобы произошло одно из событий $A$ или $B$, нужно, чтобы либо произошло событие $A$, либо, если не произошло $A$, должно произойти событие $B$.

В задачах 2.1.–2.12. необходимо построить пространствоэлементарных исходов и дать формальное описание события $A$.

- 2.1. Есть три шара — 2 чёрных и 1 белый. Без возвращения выбирают два шара. $A$ — шары разного цвета.
- 2.2. Два человека одновременно "выбрасывают"пальцы на одной руке. $A$ — первый выбрасывает больше, чем второй.
- 2.3. Подбрасывают две монеты. $A$ — монеты выпали одинаковыми сторонами.
- 2.4. Из цифр 0, 1, 2, 3 составляют двузначное число (с повторением). $A$ — полученное число делится на три.
- 2.5. На гранях правильного тетраэдра написаны цифры 1, 2, 3, 4. Этот тетераэдр подписывают два раза. $A$ — сумма цифр не меньше 5.
- 2.6. Из множества чисел 1, 2, 3, 4 без возвращения выбирают два числа. $A$ — первое число меньше второго.
- 2.7. Подбрасывают три монеты. $A$ — появился ровно один "герб".
- 2.8. Подбрасывают две игральные кости. $A$ — число очков на первой кости меньше числа очков на второй.
- 2.9. В первой урне 2 чёрных шара и 1 белый, а во второй — наоборот. Вынимают по одному шару из каждой урны. $A$ — шары разного цвета.
- 2.10. Подбрасывают монету и игральную кость. $A$ — выпал "орёл"или чётная цифра.
- 2.11. Из множества чисел 1, 2, 3, 4 выбирают с возвращением два числа. $A$ — сумма цифр чётная.
- 2.12. Электрическая лампочка горит до тех пор, пока не перегорит (испытания). $A$ — лампочка будет гореть не менее 10 часов.
- 2.13. Доказать следующие тождества для случайных событий:

  1) $A \cup A = A$. 2) $A \cap A = A$.

3) $A \cup \bar{A} = \Omega$. 4) $A \cap \bar{A} = \emptyset$.

5) Если $A \subset B$, то $A \cup B = B$ и $A \cap B = A$.

6) $A \cup \Omega = \Omega$. 7) $A \cap \Omega = A$.

8) $A \cup \emptyset = A$. 9) $A \cap \emptyset = \emptyset$.

10) Если $A \subset B \subset C$, то $A \subset C$.

11) Если $A \subset B$, то $B = A + (B \setminus A)$.

12) $A \setminus B = A \cap \bar{B}$.

13) $A \cup B = A + (B \setminus A)$.

14) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

15) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

16) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

17) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

$$18) \quad \bigcup_{\alpha \in I} \bar{A}_\alpha = \overline{\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha}.$$

$$19) \quad \bigcap_{\alpha \in I} \bar{A}_\alpha = \overline{\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha}.$$

20) $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = A_1\bar{A}_2 \ldots \bar{A}_n + \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 \ldots \bar{A}_n + + \ldots + \bar{A}_1 \ldots \bar{A}_{n-1} A_n = A_1 + \bar{A}_1 A_2 + \ldots + \bar{A}_1 \ldots \bar{A}_{n-1} A_n$.

- 2.14. Когда события $A \cap B$ и $A$ равносильны? Являются ли совместными события $A$ и $\overline{A \cup B}$?

- 2.15. На плоскость случайно бросают точку, и события $A$ и $B$ состоят в том, что точка попадает соответственно в круг $A$, в круг $B$ на этой плоскости. Какой смысл имеют события: $\bar{A}$, $\bar{B}$, $A \cup B$, $\overline{A \cup B}$, $A \cap B$, $\overline{A \cap B}$?

- 2.16. Пусть $A$, $B$, $C$ — случайные события. Выяснить смысл равенств: а) $ABC = A$, б) $A \cup B \cup C = A$.

- 2.17. Какие из следующих утверждений верны:

$$\text{а) } ABC \subset AB \cup BC \cup AC;$$

$$\text{б) } A\bar{B}C \subset A \cup B;$$

$$\text{в) } AB \cup AC \cup BC \subset A \cup B \cup C;$$

$$\text{г) } (A \cup B) \cap \bar{C} = A \cup (B \cup \bar{C})?$$

- 2.18. Мишень состоит из 10 кругов, ограниченных концентрическими окружностями с радиусами $r_i$, $i = 1, \ldots 10$, причём $r_1 < r_2 < \ldots < r_{10}$. Событие $A_i$ означает попадание в круг радиуса $r_i$. Что означают следующие события:

$$\text{а) } B = \bigcup_{i=1}^{10} A_i;$$

$$\text{б) } C = \bigcap_{i=1}^{10} A_i;$$

$$\text{в) } D = \bar{A}_1 \cap A_2?$$

- 2.19. Пусть $A$, $B$, $C$ — три произвольных события. Найти выражения для событий, состоящих в том, что

  а) произошло только $A$;

  б) произошли $A$ и $B$, но $C$ не произошло;

  в) все три события произошли;

  г) произошло, по крайней мере, одно из этих событий;

  д) произошло, по крайней мере, два события;

  е) произошло одно и только одно событие;

  ж) произошли два и только два события;

  з) ни одно событие не произошло;

  и) произошло не более двух событий.

- 2.20. На рис. 2, 3, 4, 5, 6 изображены электрические цепи. Пусть событие $A_i$ означает, что соответствующий участок цепи проводит ток. Выразить в каждом случае событие $C$, состоящее в том, что вся цепь проводит ток:

Рис. 2: .

Рис. 3: .

Рис. 4: .

Рис. 5: .

Рис. 6: .

- 2.21. Пусть дана последовательность событий $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n,\ \ldots$. Что означают события:

$$A^* = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n,$$
$$A_* = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n?$$

## §3. ВЕРОЯТНОСТЬ СОБЫТИЯ. ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА ВЕРОЯТНОСТИ

Напомним определение дискретного вероятностного пространства. Пусть $\Omega$ — дискретное (конечное или счётное) множество элементарных исходов, $P$ — мера, определённая на $\Omega$, $P : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$, и удовлетворяющая двум условиям:

$$1)\quad P(\omega) \geq 0;$$
$$2)\quad \sum_{\omega\in\Omega} P(\omega) = 1.$$

Полученная математическая модель $(\Omega, P)$ называется дискретным вероятностным пространством, число $P(\omega)$ — вероятностью элементарного исхода $\omega$.

Вероятностью события $A$ называется число $P(A) = \sum_{\omega\in A} P(\omega)$.

Докажем для примера свойство аддитивности вероятностной меры $P$.

Рис. 7: .

$$P(A \cup B) = \sum_{\omega \in A \cup B} P(\omega) =$$
$$= \sum_{\omega \in A} P(\omega) + \sum_{\omega \in B} P(\omega) =$$
$$= P(A) + P(B).$$

- 3.1. С помощью аксиом вероятностей доказать, что

  а) $P(\emptyset) = 0$;

  б) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$;

  в) $A \subseteq B \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$;

  г) $P(A) \leq 1 \; \forall A$.

- 3.2. Доказать, что если $B \subset A$, то $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$.
- 3.3. Доказать, что для любых событий $A$ и $B$

$$P(AB) \leq P(A) \leq P(A \cup B).$$

- 3.4. Доказать, что для любых двух событий $A$ и $B$ справедливо соотношение

$$|P(AB) - P(A)P(B)| \leq \frac{1}{4}.$$

- 3.5. Пусть $P(A) = a$, $P(B) = b$, $P(AB) = c$. Найти вероятности событий:

  а) $\bar{A} \cup \bar{B}$; б) $\overline{\bar{A}\bar{B}}$;

  в) $\overline{AB}$; г) $barA(A \cup B)$;

  д) $A \cup (\bar{A} \cap B)$.

- 3.6. Доказать, что $P(A \triangle B) = P(A \cup B) - P(AB)$, где $A \triangle B$ — симметрическая разность событий ($A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$).
- 3.7. Доказать, что $P(A \triangle B) = P(A) + P(B) - 2P(AB)$.
- 3.8. Доказать неравенство $P(A \triangle B) \leq P(A \triangle C) + P(C \triangle B)$.

- 3.9. $A$, $B$, $C$ — случайные события. Доказать, что

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) -$$
$$- P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC).$$

- 3.10. Доказать, что

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P(A_1) + P(\bar{A}_1 A_2) + P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) + \ldots.$$

- 3.11. Доказать, что для любых $n$ событий $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) \geq P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) - (n-1).$$

## §4. КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ

Пусть $(\Omega, P)$ — дискретное вероятностное пространство (см. §3). Рассмотрим особый частный случай, когда

1. $\Omega$ — конечно, то есть $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$;

2. все $\omega_i$ — равновероятные, то есть получается, что

$$P(\omega_i) = \frac{1}{n}\ \forall i.$$

Тогда вероятность любого события $A$ в таком вероятностном пространстве равна

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega) = \underbrace{\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}_{k = |A|} = \frac{k}{n}.$$

$\boxed{P(A) = \frac{k}{n}}$, где $k$ — число элементарных исходов, благоприятствующих событию $A$, $n$ — общее число исходов.

Полученную формулу называют "классическим определением вероятности". Важно не забывать, что эта формула верна, когда возможные исходы равновероятностны и их число конечно.

При решении такого рода задач трудности возникают чаще всего чисто комбинаторного характера, когда нужно вычислить $k$ и $n$. Здесь полезно знать некоторые стандартные ситуации:

**1. Перестановки.** Число упорядоченных последовательностей из $n$ различных элементов (число их перестановок) равно $n!$.

**Пример.** Малыш играет семью карточками с буквами А, А, О, К, М, Р, Ш, раскладывая их в ряд. С какой вероятностью получится слово "ромашка"?

Общее число исходов $n = 7!$. Число благоприятных исходов $k = 2$ (на 2-м месте может быть одна из двух карточек). Ответ: $\frac{2}{7!}$.

**2. Сочетания.** Число способов выбрать $k$ элементов из $n$ разных элементов (не важно, в каком порядке). Число сочетаний по $k$ элементов из $n$ равно

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k.$$

**Пример.** Из колоды в 36 карт вынимаются две. Какова вероятность вынуть два короля?

Ответ:

$$\frac{C_4^2}{C_{36}^2}.$$

**3. Размещения с повторениями.** Число различных упорядоченных последовательностей длины $n$ из $k$ быть может повторяющихся символов равно $k^n$.

**Пример.** Какова вероятность отгадать с первой попытки четырёхзначный цифровой шифр?

Ответ:

$$\frac{1}{10^4}.$$

Многие комбинаторные задачи сводятся к вышеизложенным трём формулам или к их комбинации.

С идеей формулы классического определения вероятности связано понятие геометрической вероятности.

Пусть множество элементарных исходов $\Omega$ есть некоторая ограниченная область на плоскости площади $S_\Omega$, причём все исходы равновозможны.

Тогда вероятность любого события $A$ $P(A)$ есть отношение площадей области $A$ и $\Omega$:

$$\frac{S_A}{S_\Omega}.$$

**<u>Пример.</u>** В круглое озеро радиуса 1 км с неба падает камень. Какова вероятность того, что камень попадёт в плот 2м×3м?

Ответ:

$$\frac{6}{\pi \cdot 10^6}.$$

Аналогичная формула применяется в одномерном случае (точка бросается, например, в отрезок), и тогда берётся отношение длин. В трёхмерном пространстве геометрическая вероятность получается как отношение объёмов.

Важно не забывать, что такой подход справедлив, когда все исходы равновозможны, а множество исходов ограничено, то есть имеет конечную длину, площадь или объём.

- 4.1. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр от 0 до 9, если все цифры в числе должны быть различными?

- 4.2. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр от 0 до 9?

- 4.3. Сколько различных делителей имеет число $7^5 \cdot 11^9$?

- 4.4. На некотором факультете учится 1300 студентов. Убедиться, что, по крайней мере, двое из них имеют одинаковые инициалы.

- 4.5. Перечислить все сочетания из пяти элементов $\{a, b, c, d, e\}$ по три элемента.

- 4.6. Пусть имеется $N$ предметов, из которых $M_1$ вида $(a)$ и $M_2$ вида $(b)$. Сколько способов извлечь $n$ предметов из $N$ так, что среди них $m_1$ вида $(a)$ и $m_2$ вида $(b)$?

- 4.7. Убедиться, что $C_n^k = C_n^{n-k}$. Какой комбинаторный смысл этого равенства?

- 4.8. Доказать с помощью комбинаторного рассуждения, что $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$, $1 \leq k \leq n-1$.

- 4.9. Сколько подмножеств из $k$ элементов у множества, содержащего $n$ элементов?

- 4.10. Сколько $k$-мерных граней ($k = 0, 1, 2, \ldots$) имеет

  а) $n$-мерный куб;

  б) $n$-мерный симплекс?

- 4.11. Перечислить все размещения из четырёх элементов $\{a, b, c, d\}$ по два элемента.

- 4.12. Сколькими способами можно рассадить 5 человек на скамье? Сколькими способами можно рассадить 5 человек вокруг круглого стола?

- 4.13. У нас имеется неограниченное число предметов ($a$) и неограниченное число предметов ($b$). Перечислить все перестановки с повторениями из трёх элементов.

- 4.14. Сколько различных "слов"можно получить, переставляя буквы слова "комбинаторика"?

- 4.15. Перечислить все сочетания с повторениями из двух элементов $\{a, b\}$ по три элемента.

- 4.16. Сколько целых неотрицательных решений имеет уравнение $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n$?

- 4.17. Имеется $n$ различных частиц и $N$ различных ячеек. Сколькими способами можно распределить частицы по ячейкам? (Так называемая статистика Максвелла–Больцмана).

- 4.18. Имеется $n$ одинаковых частиц и $N$ различных ячеек. Сколькими способами можно распределить частицы по ячейкам? (Так называемая статистика Бозе–Эйнштейна).

- 4.19. Имеется $n$ одинаковых частиц и $N$ различных ячеек. Сколькими способами можно распределить частицы по ячейкам при условии, что в ячейке не может находиться более одной частицы? (Так называемая статистика Ферми–Дирака).

- 4.20. Колода из 36 карт хорошо перемешана (то есть все возможные расположения карт равновероятны). Найти вероятность событий:

  $A = \{$четыре туза расположены рядом$\}$;

  $B = \{$места расположения тузов образуют арифметическую прогрессию с шагом 7$\}$.

- 4.21. На полке в случайном порядке расставлено 40 книг, среди которых находится трёхтомник А. С. Пушкина. Найти вероятность того, что эти тома стоят в порядке возрастания слева направо (но не обязательно рядом).

- 4.22. В урне $a$ белых и $b$ чёрных шаров. Какова вероятность того, что наудачу извлечённый шар из этой урны окажется белым?

- 4.23. Наугад выбирается по одной букве из слов "дама"и "мама". Какова вероятность того, что эти буквы

  а) одинаковы;

  б) различны?

- 4.24. Наудачу выбрано натуральное число, не превосходящее 20. Какова вероятность того, что это число кратно 5?

- 4.25. В урне $a$ белых и $b$ чёрных шаров. Из этой урны вынимают один шар и откладывают в сторону. Этот шар оказался белым. После этого из урны берут ещё один шар. Какова вероятность того, что этот шар также белый?

- 4.26. Наудачу выбрано двузначное число. Какова вероятность того, что выбранное число имеет простые делители, большие 10?

- 4.27. Игральная кость бросается дважды и записывается двузначное число $ab$, где первая цифра $a$ — число очков, выпавшее при первом бросании, а вторая цифра $b$ — число очков, выпавшее при втором бросании. Найти вероятность того, что у полученного двузначного числа

  а) цифры различные;

  б) цифры нечётные;

  в) $a < b$;

  г) $2a = b$;

  д) $a^2 = b$;

  е) $a + b = 5$;

  ж) $9 \leq a + b \leq 12$;

  з) $a - b = 1$.

- 4.28. Игральную кость бросают 6 раз. Вычислить вероятность того, что выпадут все шесть граней.

- 4.29. Из 28 костей домино случайно выбираются две. Найти вероятность $P_2$ того, что из них можно составить "цепочку"согласно правилам игры.

- 4.30. При стрельбе была получена частота попадания 0,6. Сколько было сделано выстрелов, если получено 12 промахов?

- 4.31. Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера. Полученные кубики тщательно перемешаны. Определить вероятность того, что наудачу извлечённый кубик будет иметь две окрашенные грани.

- 4.32. Найти вероятность того, что среди $k$ выбранных наудачу цифр

  а) нет цифры 0;

б) нет цифры 1;

в) нет цифр 0 и 1;

г) нет цифры 0 или нет цифры 1.

- 4.33. В качестве знаменателя обыкновенной дроби $\frac{1}{a}$ наудачу выбирается натуральное число от 30 до 39 включительно. Найдите вероятность того, что $\frac{1}{a}$ обращается

  а) в конечную десятичную дробь;

  б) в чистую периодическую;

  в) в смешанную периодическую.

- 4.34. Игральная кость бросается трижды. Пусть $x$ — сумма очков, полученных при всех бросаниях. Что более вероятно: $x = 12$ или $x = 11$?

- 4.35. Какова вероятность того, что в наудачу выбранном двузначном числе цифры одинаковы?

- 4.36. Наудачу выбрано натуральное число, не превосходящее 100. Какова вероятность того, что выбранное число при делении на 8 даёт в остатке 2?

- 4.37. Какова вероятность того, что наудачу выбранное двузначное число простое и сумма его цифр равна 5?

- 4.38. Даны отрезки длиной 2, 5, 6, 10. Какова вероятность того, что из наудачу взятых трёх отрезков можно построить треугольник?

- 4.39. Наудачу выбрано простое число, не превосходящее 20. Какова вероятность того, что оно имеет вид:

  а) $4x + 1$;

  б) $4x + 3$;

  в) $6x + 5$?

- 4.40. Из множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ случайно выбирается число $a$. Найти вероятность $P_n$ того, что число $a^2 - 1$ делится на 10. Найдите предел $P_n$ при $n \to \infty$.
- 4.41. Из множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ случайно выбирается число $a$. Найдите вероятность того, что $a$ при делении на фиксированное натуральное число $q$ даёт остаток $r$. Найдите предел этой вероятности при $n \to \infty$.
- 4.42. Из множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ случайно выбрано число $a$. Найдите вероятность того, что это число окажется точным квадратом. Найдите предел этой вероятности при $n \to \infty$.
- 4.43. Из множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ случайно выбирается число $a$. Найдите вероятность того, что число $2a + 1$ делится на 10. Найдите предел этой вероятности при $n \to \infty$.
- 4.44. Числа 1, 2, …, $n$ расположены наудачу. Какова вероятность того, что, по крайней мере, одно число будет равно номеру своего места? К какому пределу стремится эта вероятность при $n \to \infty$?
- 4.45. По схеме случайного выбора с возвращением из множества целых чисел $\{1, 2, \ldots, N\}$ выбираются числа $\xi$ и $\eta$. Обозначим $P_N$ вероятность события $\xi^2 + \eta^2 \leq N^2$. Найти $\lim\limits_{N\to\infty} P_N$.
- 4.46. Для уменьшения общего количества игр $2n$ команд разбивают на 2 подгруппы по $n$ команд каждая. Какова вероятность того, что две самые сильные команды окажутся а) в разных подгруппах; б) в одной подгруппе? Какова вероятность того, что четыре самые сильные команды попадут по две в разные подгруппы?
- 4.47. Какова вероятность того, что четырёхзначный номер случайно взятого автомобиля в большом городе а) имеет все цифры разные; б) имеет только две одинаковые цифры; в) имеет две пары одинаковых цифр; г) имеет только три одинаковые цифры; д) имеет все цифры одинаковые?

- 4.48. $A$ и $B$ и ещё 8 человек стоят в очереди. Определить вероятность того, что $A$ и $B$ отделены друг от друга тремя лицами.

- 4.49. $n$ лиц, среди которых есть $A$ и $B$, строятся в шеренгу в произвольном порядке. Какова вероятность того, что между $A$ и $B$ будет находиться ровно $r$ лиц?

- 4.50. В лотерее $n$ билетов, из которых выигрышных $m$. Участник лотереи покупает $k$ билетов. Определить вероятность того, что он выигрывает хотя бы на один билет.

- 4.51. Среди 25 экзаменационных билетов 5 "хороших". Два студента по очереди берут по одному билету. Найти вероятности следующих событий:

  $A = \{$первый студент взял "хороший"билет$\}$;

  $B = \{$второй студент взял "хороший"билет$\}$;

  $C = \{$оба студента взяли "хорошие"билеты$\}$.

- 4.52. (Задача о выборке). В партии из 50 изделий 5 бракованных. Из партии выбираются наудачу 6 изделий. Определить вероятность того, что среди этих 6 изделий 2 окажутся бракованными.

- 4.53. (Распределение шаров по ящикам). Имеются $r$ шаров, которые случайным образом разбрасываются по $n$ ящикам. В одном и том же ящике могут находиться несколько шаров и даже все шары. Найти вероятность того, что в первый ящик попадут ровно $r_1$ шаров, во второй — $r_2$ шаров и т. д., в $n$-й — $r_n$ шаров, $r_1 + r_2 + \ldots + r_n = r$.

- 4.54. Вычислить вероятность того, что для данных тридцати лиц из 12 месяцев года на 6 месяцев попадает по два дня рождения и на 6 — по 3 дня рождения.

- 4.55. Найти вероятность того, что дни рождения 12 человек придутся на разные месяцы года.

- 4.56. В группе $r$ студентов. Какова вероятность того, что, по крайней мере, два из них родились в одном и том же месяце?

- 4.57. В группе $r$ студентов. Какова вероятность того, что, по крайней мере, у двух из них совпадают дни рождения?
- 4.58. Найти вероятность того, что случайно выбранное число из множества $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ делится на фиксированное натуральное число $k$. Найдите предел этой вероятности при $n \to \infty$.
- 4.59. Из последовательности чисел $1,\ 2,\ \ldots,\ N$ отобраны наудачу $n$ чисел и расположены в порядке возрастания: $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Какова вероятность того, что $x_m \leq M$? Найти предел этой вероятности, когда $M,\ N \to \infty$ так, что $\frac{M}{N} \to \alpha > 0$.
- 4.60. Из последовательности чисел $1,\ 2,\ \ldots,\ n$ наудачу выбираются два числа. Какова вероятность того, что одно из них меньше $k$, а другое больше $k$, где $1 < k < n$ — произвольное целое число?
- 4.61. В шкафу находятся 10 пар ботинок различных сортов. Из них случайно выбираются 4 ботинка. Найти вероятность того, что среди выбранных ботинок отсутствуют парные.
- 4.62. (Вероятность распределения молекул). Газ, состоящий из $n$ молекул, находится в замкнутом сосуде. Мысленно разделим сосуд на $n$ равных клеток и будем считать, что вероятность каждой молекулы попасть в каждую из $n$ клеток одна и та же, а именно $\frac{1}{n}$. Какова вероятность того, что молекулы окажутся распределёнными так, что в первой клетке окажутся $m_1$ молекул, во второй — $m_2$ молекул и т. д., наконец, в $n$-й — $m_n$ молекул?
- 4.63. Из всех возможных отображений множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ в себя случайно выбирается одно отображение. Найти вероятность следующих событий:

  $A = \{$выбранное отображение каждый из $n$ элементов переводит в $1\}$;

  $B = \{$элемент $i$ имеет ровно $k$ прообразов$\}$;

  $C = \{$элемент $i$ переводится в $j\}$;

$D = \{$выбранное отображение элементы $i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_k$ $(1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n)$ переводит в элементы $j_1,\ j_2,\ \ldots,\ j_k$ соответственно.

- 4.64. В урне имеются 10 шаров: 3 белых и 7 чёрных. Из урны наугад вынимается один шар. Какова вероятность того, что этот шар а) белый; б) чёрный?

- 4.65. Из слова "НАУГАД"выбирается наугад одна буква. Какова вероятность того, что эта буква "Я"? Какова вероятность того, что это гласная?

- 4.66. Брошены три монеты. Найти вероятность того, что выпадут два "герба".

- 4.67. Бросают игральную кость. Какова вероятность выпадания номера 4 на верхней грани упавшей на стол кости? Какова вероятность выпадания номера, большего 4? (Игральная кость представляет собой кубик, грани которого отмечены номерами 1, 2, 3, 4, 5, 6).

- 4.68. Брошены две игральные кости. Какова вероятность выпадания единицы, по крайней мере, на одной кости?

- 4.69. На шахматную доску из 64 клеток ставят наудачу две ладьи белого и чёрного цвета. С какой вероятностью они не будут "бить"друг друга?

- 4.70. На две наудачу выбранные клетки шахматной доски поставлены два разноцветных ферзя. Найдите вероятность того, что ферзи не "бьют"друг друга?

- 4.71. На две наудачу выбранные клетки шахматной доски поставлены два разноцветных слона. Найдите вероятность того, что слоны не "бьют"друг друга?

- 4.72. Из пяти карточек с буквами А, Б, В, Г, Д наугад одна за другой выбираются три и располагаются в ряд в порядке появления. Какова вероятность того, что получится слово "ДВА"?

- 4.73. На экзамене может быть предложено $N$ вопросов. Студент знает ответы на $n$ вопросов. Экзаменатор предлагает студенту $k$ вопросов, а для того, чтобы сдать экзамен, нужно ответить не менее, чем на $r$ вопросов $(r < k)$. Какова вероятность того, что студент сдаст экзамен?

- 4.74. В урне 3 белых и 7 чёрных шаров. Какова вероятность того, что вынутые наугад два шара окажутся чёрными?

- 4.75. Ребёнок играет счетырьмя буквами разрезной азбуки А, А, М, М. Какова вероятность того, что при случайном расположении букв в ряд он получит слово "МАМА"?

- 4.76. При наборе телефонного номера абонент забыл две последние цифры и набрал их наудачу, помня только, что эти цифры нечётные и разные. Найти вероятность того, что номер набран правильно.

- 4.77. Колода игральных карт содержит 52 карты, разделяющиеся на 4 различные масти по 13 карт в каждой. Предположим, что колода тщательно стасована, так что вытаскивание любой карты одинаково вероятно. Вытащим 6 из них. Описать пространство элементарных исходов, а также найти вероятность:

  а) того, что среди этих карт будет король "пик";

  б) того, что среди этих карт будут представители всех мастей.

  Какое наименьшее число карт надо взять из колоды, чтобы вероятность того, что среди них встретятся хотя бы две карты одинакового наименования, была более $\frac{1}{2}$?

- 4.78. Из урны, в которой лежат $n$ белых и $m$ чёрных шаров, взяли наудачу $k$ шаров. Какова вероятность того, что среди вынутых шаров будет $r$ белых шаров $(r \leq n)$?

  Доказать тождество $\sum\limits_{r=0}^{k} C_n^r C_m^{k-r} = C_{n+m}^k$.

- 4.79. Бросают 5 игральных костей. Какова вероятность того, что а) сумма очков на первых двух будет больше, чем на трёх последних; б) существуют две такие кости, что сумма очков на них больше, чем на трёх остальных?

- 4.80. $n$ друзей садятся случайным образом за круглый стол. Найти вероятность того, что

  а) два фиксированных лица $A$ и $B$ сядут рядом, причём $B$ слева от $A$;

  б) три фиксированных лица $A$, $B$ и $C$ сядут рядом, причём $A$ справа от $B$, а от $C$ слева;

  в) найти те же вероятности в случае, когда друзья садятся в ряд по одну сторону прямоугольного стола.

- 4.81. Участник лотереи "Спортлото"из 49 названий видов спорта (обозначенных числами от 1 до 49) должен назвать 6. Полный выигрыш получает тот, кто правильно укажет все шесть названий. Выигрыш получат и те, кто угадает не менее трёх названий. Вычислить вероятность полного выигрыша в "Спортлото". Вычислить вероятность того, что участник "Спортлото"угадает 5, 4 и 3 названия. Какова вероятность получить выигрыш в "Спортлото"?

- 4.82. В лотерее из сорока тысяч билетов ценные выигрыши падают на три билета. Определить

  а) вероятность получения хотя бы одного ценного выигрыша на тысячу билетов;

  б) сколько необходимо приобрести билетов, чтобы вероятность получения ценного выигрыша была не менее $0,5$?

- 4.83. В партии, состоящей из $N$ изделий, имеется $M$ бракованных. Наудачу выбирается $n$ изделий из этой партии ($n \leq N$). Чему равна вероятность того, что среди них окажутся $m$ бракованных ($m \leq M$)?

- 4.84. Пусть $\varphi(n)$ означает число целых положительных чисел $\leq n$ и взаимно простых с $n$. Доказать, что

  $$\varphi(n) = n \prod \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

  где произведение берётся по всем простым числам $p$, делителям $n$.

  Указание. Рассмотреть задачу, в которой наудачу из чисел $1,\ 2,\ \ldots,\ n$ выбирается одно число. Оценить вероятность того, что оно будет взаимно просто с $n$.

- 4.85. В чулане находятся $n$ пар ботинок. Из них случайно выбираются $2r$ ботинок ($2r < n$). Какова вероятность того, что среди выбранных ботинок

  а) отсутствуют парные;

  б) имеется ровно одна комплектная пара;

  в) имеются ровно две комплектные пары?

- 4.86. Группа, состоящая из $2N$ мальчиков и $2N$ девочек, делится случайным образом на две равные части. Найти вероятность того, что в каждой части число мальчиков и девочек одинаково. Вычислить эту вероятность, используя формулу Стирлинга.

- 4.87. В урне $n$ белых и $m$ чёрных шаров; $m < n$. Последовательно без возвращения вынимаются все шары. $M(k)$ — число чёрных шаров, вынутых за $k$ шагов, $N(k)$ — число белых шаров, вынутых за $k$ шагов. Найти $P$ — вероятность того, что для всех $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n+m$, $M(k) < N(k)$.

- 4.88. Ребёнок играет с 10 буквами разрезной азбуки А, А, А, Е, И, К, М, М, Т, Т. Какова вероятность того, что при случайном расположении букв в ряд он получит слово "математика"?

- 4.89. В лифт семиэтажного дома на первом этаже вошли 3 человека. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любом из этажей, начиная со второго. Найти вероятности следующих событий:

$A = \{$все пассажиры выйдут на четвёртом этаже$\}$;

$B = \{$все пассажиры выйдут одновременно (на одном и том же этаже)$\}$;

$C = \{$все пассажиры выйдут на разных этажах$\}$.

- 4.90. В лифте 7 пассажиров; лифт останавливается на десяти этажах. Какова вероятность того, что никакие два пассажира не выйдут на одном и том же этаже?

- 4.91. В лифт 8-этажного дома на первом этаже вошли 5 человек. Предположим, что каждый из них с равной вероятностью может выйти на любом из этажей, начиная со второго. Найти вероятность того, что все пятеро выйдут на разных этажах.

- 4.92. Каждая из $n$ палок разламывается на две части — длинную и короткую. Затем $2n$ полученных обломков объединяются в $n$ пар, каждая из которых образует новую "палку". Найти вероятность того, что

  а) все обломки объединены в первоначальном порядке;

  б) все длинные части соединены с короткими.

- 4.93. Найти вероятность того, что при раздаче колоды в 52 карты четырём игрокам первый из них получит ровно $n$ пар "туз–король"одной масти.

- 4.94. Наудачу выбрано натуральное число, не превосходящее 20. Какова вероятность того, что это число окажется делителем 20?

- 4.95. Из множества $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ наудачу выбрано число $q$, после чего составлено уравнение $x^2 + 4x + q = 0$. Какова вероятность того, что корни этого уравнения окажутся

  а) действительными числами;

  б) целыми рациональными числами;

в) действительными иррациональными числами?

- 4.96. Наудачу выбрано двузначное число. Какова вероятность того, что это число окажется

  а) простым;

  б) составным;

  в) кратным 5;

  г) взаимно простым со 100?

- 4.97. Наудачу выбрана кость домино из полного набора. Какова вероятность того, что сумма очков на выбранной кости равна 5?

- 4.98. Написаны $n$ писем, но адреса на конвертах написаны наудачу. Какова вероятность того, что

  а) по крайней мере, один из адресатов получит предназначенное ему письмо;

  б) $m$ адресатов получат соответствующие письма?

- 4.99. Выбирают наудачу один член определителя $n$-го порядка. Какова вероятность того, что он не содержит элементов главной диагонали?

- 4.100. Поток из $n$ космических частиц захватывается системой из $N$ счётчиков. Каждая частица с одинаковой вероятностью попадает в любой из счётчиков. Какова вероятность того, что наличие частиц будет зарегистрировано $r$ счётчиками?

- 4.101. Поезд состоит из $N$ вагонов. Каждый из $n$ пассажиров выбирает себе вагон наудачу. Какова вероятность того, что

  а) в каждом вагоне будет, по крайней мере, один пассажир;

  б) будет занято ровно $r$ вагонов?

- 4.102. Статистика Ферми–Дирака. Каждая из $n$ неразличимых частиц попадёт в одну из $N$ ячеек ($n < N$). Какова вероятность того, что в первую, вторую, ..., $N$-ю ячейку попадёт соответственно $n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_N$ частиц, если равновозможными считаются все размещения, которые удовлетворяют запрету Паули (в каждой ячейке может быть не больше одной частицы)?

- 4.103. Возле кассы кинотеатра собралось $m+n$ человек, причём $n$ из них имеют монеты стоимостью в 50 к., а остальные $m$ имеют только по одному рублю ($m \leq n$). Стоимость билета 50 к. Какова вероятность того, что ни одному покупателю не придётся ожидать сдачи, если в начале работы

  а) в кассе не было денег;

  б) в кассе есть $p$ монет стоимостью в 50 к.?

- 4.104. Кандидат $A$ собрал на выборах $a$ голосов, а кандидат $B$ — $b$ голосов ($a > b$). Избиратели голосовали последовательно. Какова вероятность того, что при голосовании кандидат $A$ всегда был впереди по количеству отданных за него голосов? (Задача Бертрана о баллотировке).

- 4.105. В урне есть $a$ карточек, обозначенных числом 0 и $b$ карточек, обозначенных числом $\mu+1$. Карточки вынимаются из урны последовательно без возвращения. Вероятность того, что для всех $r$ ($r = 1,\ 2,\ \ldots,\ a+b$) сумма первых вынутых чисел меньше $r$, равна $\frac{a-\mu b}{a+b}$. Доказать это.

- 4.106. В гости пришли $n$ лиц, причём все были в галошах. Расходясь, гости выбрали галоши наудачу. Какова вероятность того, что каждый возьмёт правую и левую галошу?

- 4.107. Множество $K$ состоит из $(n+1)$ лиц. Некоторое лицо $A$ пишет два письма случайно выбранным из $K$ адресатам, которые образуют "первое поколение"$K_1$. Лицо из $K_1$ делает то же, в результате чего образуется "второе поколение"и т. д. Найти вероятность того, что лицо $A$ не входит ни в одно из "поколений"$K_1,\ K_2,\ \ldots,\ K_r$.

- 4.108. Бросают $n$ игральных костей. Какова вероятность того, что выпадет $n_1$ единиц, $n_2$ двоек, ..., $n_6$ шестёрок ($n_1 + \ldots + n_6 = n$)?

- 4.109. В круг $\Omega$ радиуса $R$ вписана область $D$, которая является

  а) правильным треугольником;

  б) квадратом;

  в) правильным шестиугольником. В круг $\Omega$ наудачу бросают точку. Найти вероятность попадания в область $D$.

- 4.110. В квадрат $\Omega$ с вершинами $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(1,0)$ наудачу бросают точку $M(x,y)$. Найти вероятность того, что $x^m < y < x^n$, где $m > n$ и $m$, $n$ — целые числа.

- 4.111. Точка $(b,c)$ наудачу выбирается из квадрата с вершинами $(-1,-1)$, $(1,-1)$, $(1,1)$, $(-1,1)$. Найти вероятность того, что корни уравнения $x^2 + bx + c = 0$

  а) действительные; б) мнимые; в) положительные; г) разных знаков; д) одного знака.

- 4.112. Два лица договорились встретиться в определённом месте между 12 и 13 часами. Тот, кто придёт первым, ждёт 15 минут, после чего уходит. Найти вероятность встречи, если моменты прихода каждого из них не зависят друг от друга. (Задача о встрече).

- 4.113. Плоскость разграфлена параллельными прямыми, расстояние между которыми равно $2a$. На плоскость наудачу бросают иглу длиной $2l$ ($l < a$). Найти вероятность того, что игла пересечёт какую-нибудь прямую. (Задача Бюффона).

- 4.114. В квадрат с вершинами $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(1,0)$ наудачу брошена точка $(a,b)$. Пусть $\xi$ — число действительных корней уравнения $\frac{1}{3}x^3 - a^2x + b = 0$. Найти вероятности $P\{\xi = 1\}$, $P\{\xi = 3\}$.

- 4.115. В интервале времени $[0,T]$ в случайный момент времени $t = u$ появляется сигнал длительности $\Delta$. Приёмник включается в случайный момент времени $t = v$ из интервала $[0, T]$. Найти вероятность обнаружения сигнала приёмником.

- 4.116. Отрезок случайным образом делится на три части. Найти вероятность того, что из трёх отрезков можно построить треугольник.

- 4.117. В квадрат со стороной 1 наудачу брошена точка $M$. Найти вероятности следующих событий:

  а) расстояние от точки $M$ до фиксированной стороны не превосходит $x$;

  б) расстояние от точки $M$ до ближайшей стороны не превосходит $x$;

  в) расстояние от точки $M$ до центра квадрата не превосходит $x$.

- 4.118. На отрезок $[-1, 1]$ наудачу брошены точки $x$ и $y$. Найти вероятность того, что $x + y > 0$ и одновременно $xy < 0$.

- 4.119. Задан эллипсоид $\Omega$, поверхность которого имеет уравнение

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1.$$

  Внутри задана область $D$ — шар с уравнением сферической поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. В $\Omega$ случайно брошена точка. Найти вероятность попадания точки в область $D$.

- 4.120. После бури на участке между 40-м и 70-м километрами телефонной линии произошёл обрыв провода. Какова вероятность того, что разрыв произошёл между 50-м и 55-м километрами линии?

- 4.121. Спутник Земли движется по орбите, которая заключена между $60^0$ северной и $60^0$ южной широты. Считая падение спутника в любую точку поверхности Земли между указанными параллелями равновозможным, найти вероятность того, что спутник упадёт выше $30^0$ северной широты.

- 4.122. Слой воздуха толщины $H$ содержит пылинки радиуса $r$ в количестве $\lambda$ штук в одной кубической единице. Найти вероятность того, что луч света, перпендикулярный слою, не пересечёт ни одной пылинки.