Задачи к экзамену по курсу
"Теория вероятностей и математическая статистика".
(2 часть)

1. С. в. ξ_1, ξ_2 и η таковы, что $M(\xi_1) = M(\xi_2) = M(\eta) = 0$, $D(\xi_1) = D(\xi_2) = D(\eta) = 1$, $Cov(\xi_1, \xi_2) = 1/2$, $Cov(\eta, \xi_1) = -1/2$, $Cov(\eta, \xi_2) = 1/3$. Найти наилучшую линейную оценку для η в классе $L = \{c_1\xi_1 + c_2\xi_2\}$.

2. ξ_1 и ξ_2 – независимы, $M(\xi_1) = 2$, $M(\xi_2) = 3$, $D(\xi_1) = 4$, $D(\xi_2) = 9$. $\eta = 2\xi_1 + 4\xi_2 + 5$. Вычислить $M(\eta)$ и $D(\eta)$.

3. С.в. ξ имеет $M(\xi) = a$ и $D(\xi) = \sigma^2 > 0$. Положим $\xi_0 = (\xi - a)/\sigma$. Доказать, что $M(\xi_0) = 0$, $D(\xi_0) = 1$.

4. Доказать, что если ξ имеет нормальное распределение, то $a\xi + b$ также имеет нормальное распределение.

5. С.в. ξ имеет нормальное распределение с параметрами $a = 2$, $\sigma^2 = 9$. Вычислить: $P(\xi \geq 5)$, $P(\xi < 8)$, $P(-7 < \xi < 11)$.

6. С.в. ξ имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 2$. Найти медиану и квантиль порядка 0.95 с.в. ξ.

7. Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ имеет распределение

$\xi_2 \backslash \xi_1$	-1	0	1	2
-1	0.05	0.15	0.05	0.05
0	0.1	0.1	0.1	0.1
1	0.05	0.1	0.15	0

Найти: 1) распределение с.в. $\eta = \xi_1 \cdot \xi_2$,
2) распределение каждой из координат ξ_1 и ξ_2,
3) проверить независимость ξ_1 и ξ_2,
4) условное распределение вектора ξ при условии $\xi_1\xi_2 = 0$,
5) условное распределение ξ_1 при условии $\xi_2 = -1$,
6) условное математическое ожидание ξ_1 при условии $\xi_2 = -1$,
7) $\rho(\xi_1, \xi_2)$.

8. Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ имеет плотность распределения

$$\rho_\xi(x_1, x_2) = \begin{cases} C(2x_1 + 3x_2) & , \quad x_1, x_2 \in [0,1] \ , \\ 0 & , \quad \quad .\ . \end{cases}$$

Найти: 1) константу C,

2) распределение с.в. $\eta = \xi_1 - \xi_2$,

3) распределение каждой из координат ξ_1 и ξ_2,

4) проверить независимость с.в. ξ_1 и ξ_2,

5) условную плотность ξ_1 при условии $\xi_2 = 1/2$,

6) условное математическое ожидание ξ_1 при условии $\xi_2 = 1/2$.

7) $\rho(\xi_1, \xi_2)$.

9. Вычислить характеристические и производящие функции для стандартных распределений.

10. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют равномерное распределение на отрезке [0,2]. Найти характеристическую функцию и математическое ожидание с.в. $\xi_1 + \xi_2$.

11. Доказать, что сумма двух независимых с.в. ξ_1 и ξ_2, имеющих распределения Пуассона с параметрами λ_1 и λ_2, также имеет распределение Пуассона, но с параметром $\lambda_1 + \lambda_2$.

12. С.в. ξ имеет геометрическое распределение с параметром p. Положим $\eta_p = p \cdot \xi$. Найти предельное распределение для η_p при $p \to 0$.

13. Используя характеристическую функцию, вычислить математическое ожидание и дисперсию распределения Пуассона с параметром λ.

14. Сколько раз нужно подбросить игральный кубик, чтобы сумма очков стала больше 400 с вероятностью не менее 0.9?

15. Случайные величины ξ_1, ξ_2, $\ldots$ – н.о.р., $M(\xi_1) = 1$, $D(\xi_1) = 4$. Положим $S_n = \xi_1 + \ldots \xi_n$. При каком минимальном n $P(S_n > 120) \geq 0.95$?

16. В условиях предыдущей задачи при каком δ имеет место соотношение $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - 1\right| < \delta\right) = 0.9$, если $n = 100$?

17. Ресторан под открытым небом работает только в погожие дни. Если в данной местности сегодня идет дождь, то с вероятностью 0.4 он будет и завтра, если же сегодня дождя нет, то завтра он будет с вероятностью 0.06. Описать эту ситуацию с помощью однородной цепи Маркова и найти матрицу перехода за один шаг. Найти стационарное распределение. Сегодня ресторан был закрыт. Найти вероятность того, что он будет закрыт еще два дня.

18. Однородная цепь Маркова имеет следующую матрицу перехода за один шаг

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

Нарисовать соответствующий граф и провести классификацию состояний.

19. В некотором эксперименте получена выборка $x = (-2, 1, 0, 4, -1)$. Вычислить:
1) $\hat{F}_N(0.5)$,
2) $\bar{x}$, S^2 ,
3) $\hat{y}_{1/2}$.

20. $X = (X_1, \ldots, X_N)$–повторная выборка из равномерного на $(0, \theta)$ распределения, где $\theta > 0$–неизвестный параметр. В качестве оценки θ предлагается $\hat{\theta}_N = \max\limits_k X_k$. Доказать, что это состоятельная, но смещенная оценка. Найти несмещенную оценку.

21. $X = (X_1, \ldots, X_N)$–повторная выборка из распределения Пуассона с параметром λ. По методу моментов и методу наибольшего правдоподобия найти оценки для параметра λ исследовать их на несмещенность, состоятельность и оптимальность.

22. Получена повторная выборка $x = (-0.12, 1.2, 0.8, -1.3, 0.1)$ из

генеральной совокупности с нормальным распределением с параметрами a и σ^2. Построить доверительные интервалы для параметра a с доверительным уровнем $\gamma = 0.9$

a) с известным $\sigma^2 = 1$,

b) с неизвестным σ^2.

23. По выборке из задачи 22 проверить гипотезы:

a) $H_0: \ a = 0$ против альтернативы $H_1: \ a \neq 0$,

b) $H_0: \ \sigma^2 = 1$ против альтернативы $H_1: \ \sigma^2 < 1$.

24. Некоторую монету подбросили 100 раз и получили 44 герба. Используя критерий χ^2 проверить гипотезу о симметричности монеты с уровнем значимости $\alpha = 0.05$.

25. Две монеты подбрасывали вместе 100 раз и получили следующие результаты:

	0	1
0	26	21
1	27	26

Проверить гипотезу о том, что выпадение герба на каждой монете происходит независимо друг от друга, на уровне значимости $\alpha = 0.05$.