Вариант №1

- Доказать, что формула $(\forall x)(\forall y)(x^2 + y^2 = 0 \to x = 0 \wedge y = 0)$ не эквивалентна никакой позитивной формуле в теории колец.
- Дать определение теории, допускающей элиминацию кванторов. Определить, допускает ли теория системы $(\omega, \times)$ элиминацию кванторов.
- Определить, является ли множество формул

$$\{(\exists y)x = y^2, (\exists y)x = y^4, (\exists y)x = y^8, \dots\}$$

  подмножеством какого-нибудь главного типа в системе $(\mathbb{Q}, \times)$.

Вариант №2

- Доказать, что формула $(\exists x)y + x^2 = z$ не эквивалентна никакой универсальной формуле в теории колец.
- Дать определение модельно полной теории. Определить, является ли теория системы $(\omega, +)$ модельно полной.
- Сколько различных 1-типов реализуется в системе $(\mathbb{R}, |x|)$? $|x|$ — одноместная функция модуля.

Вариант №3

- Доказать, что формула $(\forall x)(x + x)^2 \neq 1$ не эквивалентна никакой экзистенциальной формуле в теории колец.
- Дать определение термальной скулемовской функции. Определить, имеет ли теория системы $(\omega, \times)$ термальные скулемовские функции.
- Определить, является ли множество формул

$$\{\neg(\exists y)x = y^2,\ \neg(\exists y)x = y^3,\ \neg(\exists y)x = y^3, \dots\}$$

  подмножеством какого-нибудь главного типа в системе $(\mathbb{Q}, +, \times)$.

Вариант №4

- Доказать, что формула $(\forall x)(\exists z)(x < y \to x < y \wedge y < z)$ не эквивалентна никакой универсальной формуле в теории строгого линейного порядка.
- Дать определение гомоморфизма. Определить, является ли система $(\mathbb{Q}, <)$ гомоморфным образом системы $(\mathbb{R}, <)$.
- Сколько различных 2-типов реализуются в системе $(\mathbb{Z}, -^{(1)})$? $-^{(1)}$ — одноместная функция изменения знака.

Вариант №5

- Доказать, что формула $(\exists x) x * x = y$ не эквивалентна никакой универсальной формуле в теории групп.
- Дать определение аксиоматизируемого класса. Определить, является ли аксиоматизируемым класс вполне упорядоченных множеств.
- Определить, является ли множество формул

  $$\{(\exists y) \exp y = x, (\exists y) \exp \exp y = x, (\exists y) \exp \exp \exp y = x, \dots\}$$

  подмножеством какого-нибудь главного типа в системе $(\mathbb{R}, \exp)$.

Вариант №6

- Доказать, что формула $(\forall x) x * x = e$ не эквивалентна никакой экзистенциальной формуле в теории групп.
- Дать определение цепи и ее объединения. Определить, можно ли из колец вида $\mathbb{Z}_{2^n}$, $n \in \omega$ составить цепь.
- Определить, реализуются ли в системе $(\mathbb{C}, ix)$ какие-нибудь неглавные типы. ix — одноместная функция умножения на мнимую единицу.

Вариант №7

- Доказать, что формула $(\forall x)(x \leq y \vee y \leq x)$ не эквивалентна никакой экзистенциальной формуле в теории частичного порядка.
- Дать определение элементарной эквивалентности. Определить, является ли системы $(\mathbb{R}, \leq, \times)$ и $(\mathbb{Q}, \leq, \times)$ элементарно эквивалентными.
- Определить, является ли множество формул

  $$\{\sin x < x, \sin \sin x < \sin x, \sin \sin \sin x < \sin \sin x, \dots\}$$

  подмножеством какого-нибудь главного типа в системе $(\mathbb{R}, \times, <, \sin)$.

Вариант №8

- Доказать, что формула $(\forall x)(x * x = e \to x = e)$ не эквивалентна никакой позитивной формуле в теории групп.

- Дать определение консервативного расширения. Определить, является ли теория системы $(\mathbb{R}, +, \times)$ консервативным расширением теории полей.

- Определить, является ли множество формул

$$\{\sin x < x, 2\sin x < x, 3\sin x < x, \dots\}$$

подмножеством какого-нибудь главного типа в системе $(\mathbb{R}, \times, <, \sin)$.