Вариант №1

- Доказать с помощью теоремы компактности следующее утверждение. Пусть для любого n множество формул X имеет моделью группу все элементы (кроме нейтрального) которой имеют порядок больший n. Тогда существует модель X, которая является группой, все элементы которой имеют бесконечный порядок (кроме нейтрального).
- Доказать секвенцию $(\exists x)\phi \vee (\exists x)\psi \vdash (\exists x)(\phi \vee \psi)$. В доказательстве допускается опускать применения правил перестановки и многократные применения правила утончения заменять однократным.

Вариант №2

- Доказать с помощью теоремы компактности следующее утверждение. Пусть для любого n множество формул X имеет моделью кольцо, в котором никакая n-ая степень ненулевого элемента не равна нулю. Тогда существует модель X, которая является кольцом без нильпотентных элементов.
- Доказать секвенцию $(\exists x)\phi \wedge (\forall x)\psi \vdash (\exists x)(\phi \wedge \psi)$. В доказательстве допускается опускать применения правил перестановки и многократные применения правила утончения заменять однократным.

Вариант №3

- Доказать с помощью теоремы компактности следующее утверждение. Пусть для любого n множество формул X имеет моделью граф, в котором существует полный подграф из n элементов. Тогда существует модель X, которая является графом, в котором есть бесконечный полный подграф.
- Доказать $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow P(y)), (\forall x)(\exists y)R(x, y) \vdash (\exists y)P(y)$. В доказательстве допускается опускать применения правил перестановки и многократные применения правила утончения заменять однократным.

Вариант №4

- Доказать с помощью теоремы компактности следующее утверждение. Пусть для любого n множество формул X имеет моделью граф, в котором существует путь длины n без повторений. Тогда существует модель X, которая является графом, в котором есть бесконечный путь без повторений.
- Доказать секвенцию $(\exists x)P(x) \rightarrow (\forall x)P(x), (\forall x)(\neg P(x) \rightarrow P(f(x))) \vdash (\forall x)P(x)$. В доказательстве допускается опускать применения правил перестановки и многократные применения правила утончения заменять однократным.

Вариант №5

- Доказать с помощью теоремы компактности следующее утверждение. Пусть для любого n множество формул X имеет моделью частично упорядоченное множество, в котором есть цепь длины n. Тогда существует модель X, которая является частично упорядоченным множеством, в котором есть бесконечная цепь.

- Доказать секвенцию $(\exists x)\phi \to (\forall y)\psi \vdash (\forall x)(\forall y)(\phi \to \psi)$, если x не входит свободно в ψ, а y — в ϕ. В доказательстве допускается опускать применения правил перестановки и многократные применения правила утончения заменять однократным.

Вариант №6

- Доказать с помощью теоремы компактности следующее утверждение. Пусть для любого n множество формул X имеет моделью граф не менее чем из n несвязанных компонентов. Тогда существует модель X, которая является графом из бесконечного числа несвязанных компонентов.

- Доказать секвенцию $(\forall x)(\forall y)(\exists z) f(x,z) = y, (\exists z)(\forall x)P(f(z,x)) \vdash (\forall x)P(x)$. В доказательстве допускается опускать применения правил перестановки и многократные применения правила утончения заменять однократным.

Вариант №7

- Доказать с помощью теоремы компактности следующее утверждение. Пусть для любого n множество формул X имеет моделью линейно упорядоченное множество, в котором есть дискретно упорядоченный фрагмент длины n. Тогда существует модель X, которая является линейно упорядоченным множеством, в котором есть бесконечный дискретно упорядоченный фрагмент.

- Доказать секвенцию

  $$(\forall x)(P(x) \to (\forall x)P(f(x))), (\forall x)(P(f(x)) \to P(x)) \vdash (\forall x)P(x) \lor (\forall x)\neg P(x).$$

  В доказательстве допускается опускать применения правил перестановки и многократные применения правила утончения заменять однократным.

Вариант №8

- Доказать с помощью теоремы компактности следующее утверждение. Пусть для любого n множество формул X имеет моделью граф, в котором существует вершина, связанная с n другими вершинами. Тогда существует модель X, которая является графом, в котором есть вершина, связанная с бесконечным числом вершин.

- Доказать секвенцию $(\forall x)P(x) \lor (\forall x)R(x), (\forall x)(P(x) \lor \neg R(f(x))) \vdash (\forall x)P(x)$. В доказательстве допускается опускать применения правил перестановки и многократные применения правила утончения заменять однократным.

Вариант №9

- Доказать с помощью теоремы компактности следующее утверждение. Пусть для любого n множество формул X имеет моделью граф, в котором существует изолированный подграф в виде кольца длины n. Тогда существует модель X, которая является графом, в котором есть изолированный подграф в виде бесконечной в обе стороны линии.

- Доказать секвенцию $(\forall x)(\phi \to (\exists y)\psi) \vdash (\forall y)(\forall x)\neg\psi \to (\forall x)\neg\phi$. В доказательстве допускается опускать применения правил перестановки и многократные применения правила утончения заменять однократным.

Вариант №10

- Доказать с помощью интерполяционной теоремы следующее утверждение. Если формула монотонна по всем входящим в нее предикатным символам, то она эквивалентна формуле, в которой вхождения всех предикатных символов положительны.

- Доказать секвенцию

  $$(\forall x)(P(x) \to (\exists x)R(x)), (\forall x)(\forall y)(R(x) \to Q(x,y)) \vdash (\forall x)(\exists y)(P(x) \to Q(y,x)).$$

  В доказательстве допускается опускать применения правил перестановки и многократные применения правила утончения заменять однократным.

Вариант №11

- Доказать с помощью теоремы компактности следующее утверждение. Пусть для любого n множество формул X имеет моделью группу, в которой все соотношения между образующими имеют длину больше n и число образующих не меньше n. Тогда существует модель X, которая имеет свободную подгруппу с бесконечным числом образующих.

- Доказать $(\forall x)(\forall y)f(x,y) = f(y,x), (\forall y)(\forall x)P(f(g(x),y)) \vdash (\forall x)(\exists y)P(f(x,y))$. В доказательстве допускается опускать применения правил перестановки и многократные применения правила утончения заменять однократным.

Вариант №12

- Доказать с помощью теоремы компактности следующее утверждение. Пусть для любого n множество формул X имеет моделью группу с выделенной подгруппой индекса больше или равного n. Тогда существует модель X, которая является группой с выделенной подгруппой бесконечного индекса.

- Доказать секвенцию $(\forall x)\phi \vee (\forall x)\psi \vdash (\forall x)(\phi \vee \psi)$. В доказательстве допускается опускать применения правил перестановки и многократные применения правила утончения заменять однократным.

Вариант №13

- Доказать с помощью интерполяционной теоремы следующее утверждение. Если формула антимонотонна по всем входящим в нее предиктаным символам, то она эквивалентна формуле, в которую все эти символы входят отрицательно.
- Доказать секвенцию

  $$(\forall x)(\forall y)(P(x) \wedge R(x,y) \to x = y), (\forall y)(\forall x)(R(x,y) \to Q(y)), (\forall y)(\exists x)R(y,x) \vdash \\ \vdash (\forall x)(P(x) \to Q(x)).$$

  В доказательстве допускается опускать применения правил перестановки и многократные применения правила утончения заменять однократным.

Вариант №14

- Доказать следующее утверждение. Пусть X — множество позитивных формул. Тогда построение множества Хинтикки на основе X можно осуществлять независимо от функции, выбирающий элемент дизъюнкции и импликации.
- Доказать секвенцию

  $$(\exists x)f(x) = x, (\forall x)(P(f(x)) \to Q(x)) \vdash (\forall x)P(x) \to (\exists x)(Q(x) \wedge P(x)).$$

  В доказательстве допускается опускать применения правил перестановки и многократные применения правила утончения заменять однократным.

Вариант №15

- Доказать с помощью теоремы компактности следующее утверждение. Пусть для любого n множество формул X имеет моделью поле характеристики больше n. Тогда существует модель X, которая является полем нулевой характеристики.
- Доказать секвенцию

  $$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(Q(x,y,z) \to x = y), (\forall x)(\forall y)(\forall z)(Q(x,y,z) \to Q(y,z,x)) \vdash \\ \vdash (\forall x)(\forall y)(\exists x)Q(x,z,y) \to (\forall x)(\forall y)x = y.$$

  В доказательстве допускается опускать применения правил перестановки и многократные применения правила утончения заменять однократным.

Вариант №16

- Доказать следующее утверждение. Пусть X — множество негативных формул. Тогда построение множества Хинтикки на основе X можно осуществлять независимо от функции, выбирающий элемент дизъюнкции и импликации.

- Доказать секвенцию $(\forall x)\phi \wedge (\forall x)\psi \vdash (\forall x)(\phi \wedge \psi)$. В доказательстве допускается опускать применения правил перестановки и многократные применения правила утончения заменять однократным.