Вариант №1

- Доказать с помощью леммы Цорна, что в каждом частично упорядоченном множестве существует максимальная цепь, то есть цепь, которая перестает быть цепью при добавлении к ней любого элемента.
- Записать формулы: $Pair(x, y, z)$, означающую x — упорядоченная пара (y, z), $Func(x, y, z)$, означающую x — функция из y на z, $Less(x, y)$, означающую $|x| \leq |y|$.

  Формулы должны быть записаны в сигнатуре $\{\in^{(2)}\}$. Для удобства, можно определить вспомогательные формулы.

Вариант №2

- Доказать, что для того, чтобы лексикографический порядок на строках был полным необходимо и достаточно, чтобы алфавит содержал ровно один символ.
- Даны формулы: $\Omega(x)$ означающая, что x — множество натуральных чисел.

  Записать формулы: $Pair(x, y, z)$, означающую x — упорядоченная пара (y, z), $Func(x, y, z)$, означающую x — функция из y на z, Ram, означающую теорему Рамсея для двухэлементных множеств натуральных чисел.

  Формулы должны быть записаны в сигнатуре $\{\in^{(2)}\}$. Для удобства, можно определить вспомогательные формулы.

Вариант №3

- Доказать с помощью леммы Цорна, что в каждом частично упорядоченном множестве существует максимальная антицепь, то есть антицепь, которая перестает быть антицепью при добавлении к ней любого элемента. Антицепь — множество элементов, никакие два из которых несравнимы.
- Даны формулы: $Sub(x, y)$ означающая, что $x \subseteq y$, $Card(y)$ означающая, что y — кардинал. $F(x, y)$ означающая, что x — фильтр булевой алгебры $(P(y), \subseteq)$.

  Записать формулы: $Pair(x, y, z)$, означающую x — упорядоченная пара (y, z), $Func(x, y, z)$, означающую x — функция из y на z, $Compl(x, y)$, означающую y — кардинал, и x — y-полный неглавный ультрафильтр булевой алгебры $(P(y), \subseteq)$. Ультрафильтр называется α-полным, если пересечение меньшего чем α числа его элементов непусто.

  Формулы должны быть записаны в сигнатуре $\{\in^{(2)}\}$. Для удобства, можно определить вспомогательные формулы.

Вариант №4

- Пусть G — ориентированный граф. Доказать, что отношение достижимости на вершинах графа является рефлексивным и транзитивным, а то же отношение на компонентах сильной связности — нестрогим частичным порядком.
- Записать формулы: $Sub(x, y)$, означающую $x \subseteq y$, $Zorn$, означающую лемму Цорна.

  Формулы должны быть записаны в сигнатуре $\{\in^{(2)}\}$. Для удобства, можно определить вспомогательные формулы.

Вариант №5

- Доказать с помощью принципа максимума, что для каждого множества A существует множество B такое, что $\bigcup A = \bigcup B$, элементы множества B являются подмножествами элементов A и элементы B попарно непересекаются. Указание: использовать отношение, означающее, что все элементы одного множества являются подмножествами элементов другого.
- Даны формулы: $Pair(x, y, z)$, означающую x — упорядоченная пара (y, z), $Ord(x)$ означающая, что x — ординал.

  Записать формулы: $Func(x, y, z)$, означающую x — функция из y на z, $Mult(x, y, z)$, означающую $x \times_o y = z$ (произведение ординалов).

  Формулы должны быть записаны в сигнатуре $\{\in^{(2)}\}$. Для удобства, можно определить вспомогательные формулы.

Вариант №6

- Доказать с помощью леммы Цорна, что в каждом линейном пространстве над полем существует базис (то есть максимальное линейно независимое множество элементов). Множество линейно зависимо, если некоторая конечная линейная комбинация его элементов с ненулевыми коэффициентами равна нулю.
- Даны формулы: $Pair(x, y, z)$, означающую x — упорядоченная пара (y, z), $Ord(x)$ означающая, что x — ординал.

  Записать формулы: $Func(x, y, z)$, означающую x — функция из y на z, $Add(x, y, z)$, означающую $x +_o y = z$ (сумма ординалов).

  Формулы должны быть записаны в сигнатуре $\{\in^{(2)}\}$. Для удобства, можно определить вспомогательные формулы.

Вариант №7

- Доказать с помощью леммы Цорна, что в каждой группе существует максимальное множество независимых элементов. Элемент a называется зависимым от элементов множества A, если a выражается через элементы A при помощи групповой операции $*$ и операции нахождения обратного элемента. Множество независимо, если каждый элемент не зависит от остальных.

- Даны формулы: $Ord(x)$ означающая, что x — ординал.

  Записать формулы: $Pair(x, y, z)$, означающую x — упорядоченная пара (y, z), $Func(x, y, z)$, означающую x — функция из y на z, $Sim(x, y, z)$, означающую x — подобие y на начальный сегмент z (x, y, z — ординалы).

  Формулы должны быть записаны в сигнатуре $\{\in^{(2)}\}$. Для удобства, можно определить вспомогательные формулы.

Вариант №8

- Пусть A — множество непересекающихся открытых интервалов действительных чисел. Доказать, что A счетно. Указание: воспользоваться счетностью множества рациональных чисел.

- Даны формулы: $Ord(x)$ означающая, что x — ординал.

  Записать формулы: $Pair(x, y, z)$, означающую x — упорядоченная пара (y, z), $Func(x, y, z)$, означающую x — функция из y на z, $Conf(x, y)$, означающую $\mathrm{cf}(x) = y$.

  Формулы должны быть записаны в сигнатуре $\{\in^{(2)}\}$. Для удобства, можно определить вспомогательные формулы.

Вариант №9

- Пусть $(A, \leq_A)$ — частично упорядоченное множество. f — функция из A на B. Определим отношение $\leq_B$ на B следующим образом: $b_1 \leq_B b_2$, если $b_1 = f(a_1)$, $b_2 = f(a_2)$ и $a_1 \leq a_2$ для некоторых $a_1, a_2 \in A$. Доказать, что $\leq_B$ — отношение частичного порядка на B, или опровергнуть это утверждение.

- Даны формулы: $Card(x)$ означающая, что x — кардинал, $\Omega(x)$ означающая, что x — множество натуральных чисел.

  Записать формулы: $Pair(x, y, z)$, означающую x — упорядоченная пара (y, z), $Func(x, y, z)$, означающую x — функция из y на z, CH, означающую континуум-гипотезу.

  Формулы должны быть записаны в сигнатуре $\{\in^{(2)}\}$. Для удобства, можно определить вспомогательные формулы.

Вариант №10

- Пусть $(A, \leq)$ — линейно упорядоченное множество. Множество $B \subseteq A$ называется плотным в A, если для любых $a_1 < a_2 \in A$ существует $b \in B$, для которого $a_1 \leq b < a_2$. Доказать, что для любого плотного в A множества выполняется $|A| \leq 2^{|B|}$. Указание: рассмотреть начальные сегменты A.

- Записать формулы: $Ind(x)$, означающую x — индуктивное множество. $\Omega(x)$, означающую x — множество натуральных чисел.

  Формулы должны быть записаны в сигнатуре $\{\in^{(2)}\}$. Для удобства, можно определить вспомогательные формулы.

Вариант №11

- Пусть $(A, \leq_A)$ и $(B, \leq_B)$ — частично упорядоченные фундированные множества. Определим отноешние на $A \times B$: $(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2)$, если $a_1 \leq_A a_2$ и $b_1 \leq_B b_2$. Доказать, что $\leq$ — фундированный частичный порядок.

- Записать формулы: $Pair(x, y, z)$, означающую x — упорядоченная пара (y, z), $Func(x, y, z)$, означающую x — функция из y на z, $Kant$, означающую теорему Кантора.

  Формулы должны быть записаны в сигнатуре $\{\in^{(2)}\}$. Для удобства, можно определить вспомогательные формулы.

Вариант №12

- Пусть $(A, \leq_A)$ – вполне упорядочено. Определим отношение $\leq$ на $P(A)$: $x \leq y$, если $x \subseteq y$ или $\min x \setminus y \leq_A \min y \setminus x$. Доказать, что $\leq$ — нестрогий линейный порядок, или опровергнуть это утверждение.

- Пусть $(a, \leq)$ — булева алгебра.

  Записать формулы: $Inf(x, y, z)$, означающую $x = \inf\{y, z\}$, $F(x)$, означающую x — фильтр, $Uf(x)$, означающую x — ультрафильтр.

  Формулы должны быть записаны в сигнатуре $\{\in^{(2)}\}$. Для удобства, можно определить вспомогательные формулы.

Вариант №13

- Доказать, что $\alpha^{(\beta\gamma)} = (\alpha^\beta)^\gamma$ для любых кардиналов α, β, γ.

- Даны формулы: $Conf(x, y)$ означающая, что x — конфинальное в y множество, $Card(x)$ означающая, что x — кардинал.

  Записать формулы: $Pair(x, y, z)$, означающую x — упорядоченная пара (y, z), $Func(x, y, z)$, означающую x — функция из y на z, $In(x)$, означающую x — недостижимый кардинал.

  Формулы должны быть записаны в сигнатуре $\{\in^{(2)}\}$. Для удобства, можно определить вспомогательные формулы.

Вариант №14

- Пусть α — предельный ординал. Доказать, из $\mathrm{cf}(\alpha) > \omega$ следует, что множество предельных ординалов меньших α конфинально в α. Доказать, что обратное неверно.

- Даны формулы: $Sum(x, y)$ означающая, что x — сумма y.

  Записать формулы: $Pair(x, y, z)$, означающую x — упорядоченная пара (y, z), $Func(x, y, z)$, означающую x — функция из y на z, AC, означающую аксиому выбора.

  Формулы должны быть записаны в сигнатуре $\{\in^{(2)}\}$. Для удобства, можно определить вспомогательные формулы.

Вариант №15

- Пусть G — бесконечный ориентированный граф. Доказать, что в G или существует бесконечный путь, или существует бесконечный антипуть. Антипуть — множество вершин, каждая из которых недостижима из других. Указание: использовать теорему Рамсея.

- Даны формулы: $Ord(x)$ означающая, что x — ординал.

  Записать формулы: $Pair(x, y, z)$, означающую x — упорядоченная пара (y, z), $Func(x, y, z)$, означающую x — функция из y на z, $Card(x)$, означающую x — кардинал.

  Формулы должны быть записаны в сигнатуре $\{\in^{(2)}\}$. Для удобства, можно определить вспомогательные формулы.

Вариант №16

- Пусть A — бесконечное множество. Доказать, что A может быть линейно упорядочено не менее чем $2^{|A|}$ способами. Указание: рассмотреть начальные сегменты порядков.
- Даны формулы: $Pair(x, y, z)$ означающая, что x — упорядоченная пара (y, z).

  Записать формулы: $Trans(x)$, означающую x — транзитивное множество, $CO(x, y)$, означающую y — полный порядок на x, $Ord(x)$, означающую x — ординал.

  Формулы должны быть записаны в сигнатуре $\{\in^{(2)}\}$. Для удобства, можно определить вспомогательные формулы.