Вариант 1

1. (10) Сколько охранников достаточно для охраны следующей галереи
$P = \{(0,0),(10,-5),(5,-15),(10,-10),(20,-20),(25,-10),(30,10),(20,5),$
$(30,20),(15,25),(20,15),(10,15),$
$(5,5)\}$ по теореме о $G(n)$? Какова оптимальная расстановка охранников для этой галереи?

2. (20) Докажите, что всякое бинарное (неориентированное) дерево является дуальным графом триангуляции некоторого многоугольника (даже монотонной горы).

3. (15) Построить функцию отказов и ДКА для распознавания вхождения подслова $y = adadaad$. Используя этот ДКА, найти вхождение y в слово $x = dadadadadaadd$.

4. (20) Доказать, что алгоритм моделирования НКА M корректен, т.е. для каждого i множество построенных на шаге i состояний определяется равенством $S_i = \{q \mid (q_0; a_1a_2...a_i) \vdash (q, \epsilon)\}$.

5.(25) Модифицируйте алгоритм Укконена так, чтобы он строил объединенное суффиксное дерево для множества слов $W = \{w_1, ..., w_k\}$ общей длины $\sum_{i=1}^{k} |w_i| = n$ за время $O(n)$.
Замечание. Метки дуг в объединенном дереве имеют вид $(i; p, q)$, где i — номер слова во множестве, а p и q начальная и заключительная позиция подслова-метки в слове w_i.

6. (10) Для следующего экземпляра задачи ВЕРШИННОЕ_ПОКРЫТИЕ
$G = (\{1,2,3,4,5\}, \{(1,2),(1,3),(2,4),(3,4),(5,3)\}),\ k = 2,$
построить эквивалентный экземпляр задачи ОРИЕНТ_ГАМИЛЬТОНОВ_ЦИКЛ и для некоторого 2-покрытия указать соответствующий гамильтонов цикл.

7. (20) Докажите NP-полноту задачи "Кратчайший путь с ограничениями по весу".
Вход: граф $G = (V, E)$, функция $l(e)$, задающая целочисленную длину ребер из E, функция $w(e)$, задающая целочисленый вес ребер из E, вершины s и t из V и положительные целые числа K и W
.
Вопрос: Существует ли в G простой путь из s t веса не более W и длины не более K?
(Указание: к этой задаче сводится задача РАЗБИЕНИЕ).

Вариант 2

1. (10) Предложите формулу для площади выпуклого многоугольника через его вершины.

2. (20) Предложите структуру данных для хранения информации о "заметающей"прямой в алгоритме трапецизации многоугольника и опишите алгоритм изменения этой информации при пересечении прямой очередной вершины (используйте в нем процедуры *Слева, Пересекаются и др.*)

3. (15) Построить для заданного регулярного выражения R НКА M, допускающий язык $L(R)$, задаваемый R. Найти с помощью алгоритма моделирования НКА все вхождения слов из $L(R)$ в слово x.
$R = a(bb + ab)^*(a + ba),\ x = bababab babba$.

4. (20) Пусть $y = b_1 b_2 ... b_n$. Доказать, что алгоритм ФОТ, вычисляет функцию отказов $f(j), 1 \leq j \leq n$, за линейное время $O(n)$.

5. (25) Требуется по двум словам S_1 и S_2 найти самое длинное слово P, которое входит как подслово и в S_1, и в S_2.

а) Докажите, что с использованием суффиксных деревьев эту задачу можно решить за время, линейное от $(|S_1| + |S_2|)$.

б) Используя предложенный алгоритм, найдите самое длинное общее подслово для слов $S_1 = abbba$ и $S_2 = baabba$.

6. (10) Для экземпляра задачи ОРИЕНТ_ГАМИЛЬТОНОВ_ЦИКЛ
$G = (V = \{1, 2, 3, 4, 5\},\ E = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (4, 3), (3, 5), (5, 1)\})$
построить эквивалентный экземпляр G' задачи НЕОРИЕНТ_ГАМИЛЬТОНОВ_ЦИКЛ и для некоторо
гамильтонова цикла в G указать соответствующий гамильтонов цикл в G'.

7. (20) Докажите NP-полноту задачи "Множество представителей".
Вход: набор C подмножеств конечного множества S и положительное целое число k ($k \leq |S|$).
Вопрос: существует ли такое подмножество $S' \subseteq S$, что $|S'| \leq k$, которое содержит по крайней мере один элемент каждого подмножества из C?
(Указание: к этой задаче сводится задача ВЕРШИННОЕ ПОКРЫТИЕ).

Вариант 3

1. (10) Как по списку вершин многоугольника определить в каком порядке они идут: по часовой стрелке или против часовой стрелки.

2.(20) Детализируйте алгоритм триангуляции монотонной горы, используя процедуры *Слева, Пересекаются и др.* Оцените сложность получившегося алгоритма.

3. (15) Построить функцию отказов и ДКА для распознавания вхождения подслова $y = cdcdcc$. Используя этот ДКА, найти вхождение y в слово $x = dcddcdcdccdc$.

4. (20) Доказать корректность алгоритма Боейра-Мура.

5. (25) Предположим, что к заданному множеству слов $M = w_1, \ldots, w_m$ общей длины n добавляется новое слово или из него удаляется некоторое слово. Предложите алгоритмы, которые на объединенном суффиксном дереве T, построенном для M, эффективно выполняют эти операции.

6. (10) Какая задача КЛИКА соответствует следующей 3-КНФ:
$\Phi = (X \vee Y \vee Z)\ \&(X \vee \neg Y \vee \neg Z)\ \&\ (\neg X \vee Y \vee Z)\ \&\ (\neg X \vee Y \vee \neg Z)$?
Найдите соответствие между некоторым набором значений переменных, на котором Φ истинна, и 4-кликой.

7. (20) Докажите NP-полноту задачи "Самый длинный цикл": Вход: граф $G = (V, E)$, функция $l(e)$, задающая целочисленную длину ребер из E и число K. Вопрос: существует ли в G простой цикл длины не меньше K. (Указание: к этой задаче сводится задача ГАМИЛЬТОНОВ ЦИКЛ).

Вариант 4

1. (15) Пусть точка p лежит внутри выпуклого многоугольника с вершинами $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Предложите алгоритм, который строит список этих вершин в порядке обхода многоугольника против часовой стрелки. Оцените его сложность.

2. (20) Предложите алгоритм, который по триангуляции Делоне $\mathcal{D}(P)$ строит диаграмму Вороного $\mathcal{V}(P)$. Какова его сложность? (Хорошо бы получить алгоритм сложности $O(n)$).

3. (20) Как расширить алгоритм моделирования НКА M, чтобы он находил в слове $x = a_1...a_n$ наименьшее k такое, что для некоторого j подслово $a_j...a_k$ принадлежит $L(M)$, и наибольшее из таких j.

4. (20) Оцените время работы алгоритма ПОДКА в алгоритме поиска подслов Морриса-Пратта.

5. (15) Построить с помощью алгоритма Укконена суффиксное дерево для слова $x = aabaab\$$. Определить с его помощью все позиции, в которых в x входит подслово ab.

6. (10) Какая задача РАЗБИЕНИЕ соответствует следующей задаче 3-СОЧЕТАНИЕ: $W = \{w1, w2\}, X = \{x1, x2\}$, $Y = \{y1, y2\}$, $M = \{< w1, x1, y2 >, < w1, x2, y2 >, < w2, x2, y1 >\}$.
Найдите соответствие между некоторым совершенным 3-сочетанием и разбиением.

7. (20) Докажите NP-полноту задачи РАЗБИЕНИЕ НА ТРЕУГОЛЬНИКИ:
Вход: неориентированный граф G=(V,E), такой, что для некоторого целого q: $|V| = 3q$.
Вопрос: можно ли разбить вершины графа G на q непересекающихся множеств $V_1, \ldots, V_q$, каждое из которых содержит ровно 3 вершины, попарно соединенных ребрами, т.е. для каждого $i = 1, \ldots, q$ $V_i = \{u_i, v_i, w_i\}$ и $(u_i, v_i), (v_i, w_i), (w_i, u_i) \in E$.
(Указание: к этой задаче сводится задача 3-СОЧЕТАНИЕ).

Вариант 5

1. (15) Построить граф видимости и найти кратчайший путь робота из точки $s = (0, 0)$ в точку $t = (100, 0)$, если на плоскости имеются следующие препятствия:
$A = \{(5, 10), (10, -30), (30, -30), (30, 10)\}$,
$B = \{(35, 60), (40, 0), (60, 0)\}$,
$C = \{(70, 20), (70, -20), (90, -20), (90, 20)\}$.

2. (15) Предложите алгоритм, который строит выпуклое замыкание монотонного многоугольника за линейное время.

3. (15) Вычислите используемые в алгоритме Бойера-Мура функции λ и γ для слова-образца $y = bcabbccabb$ и найдите с помощью этого алгоритма первое вхождение y в слово
$x = abcabbbcabbbcabbccabbccbcabb$.

4. (25) Как расширить алгоритм моделирования НКА M, чтобы он находил в слове $x = a_1...a_n$ наименьшее k такое, что для некоторого j подслово $a_j...a_k$ принадлежит $L(M)$, и наименьшее из таких j.

5.(20) Пусть задано циклическое слово $S[1..n]$, в котором за каждым символом $S(i)$ следует символ $S(i + 1 \mod n)$. Задача состоит в том, чтобы выбрать место разрезания этого слова i так, чтобы получившееся линейное слово $S^i = S(i) \dots S(n)S(1) \dots S(i - 1)$ было лексикографически минимальным среди всех таких линейных слов. Предложите алгоритм линейной сложности для линеаризации циклических слов.
Указание: используйте суффиксное дерево для слова LL, где L — произвольная линеаризация S.

6. (15) Рассмотрим задачу о рюкзаке:
по набору предметов $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, их объемов $s(a_1), \dots s(a_n)$ и числу B найти такое подмножество $A' \subseteq A$, для которого $\sum_{a \in A'} s(a) = B$. Используем для ее решения алгоритм "динамического программирования":
пусть $m(i, j) = 1$, если среди первых i предметов $a_1, \dots, a_i$ можно выбрать подмножество общего объема j, иначе $m(i, j) = 0$. Напишите реккурентное соотношение для $m(i, j)$. Определите сложность решения задачи о рюкзаке, т.е. вычисления $m(n, B)$, через параметры задачи. Явлется ли предложенный алгоритм полиномиальным?

7. (20) Доказать, что следующая задача является NP-полной. НАИБОЛЬШИЙ ОБЩИЙ ПОДГРАФ: по двум графам $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2)$ и числу $k > 0$ определить существуют ли такие подмножества $E_1' \subseteq E_1$ и $E_2' \subseteq E_2$, $|E_1'| = |E_2'| \geq k$, что подграфы $G_1' = (V_1, E_1')$ и $G_2' = (V_2, E_2')$ изоморфны.
(Указание: сведите к этой задаче задачу КЛИКА).

Вариант 6

1. (10) Найдите наилучший случай расположения n точек для алгоритма построения выпуклого замыкания методом "заворачивания подарка". Какова его минимальная сложность как функция от n?

2. (15) Докажите, свойство V2, не используя свойство D6. V2: область Вороного $V(p_i)$ точки p_i является неограниченной $\Leftrightarrow$ точка p_i лежит на выпуклом замыкании P.

3. (15) Используя алгоритм моделирования проверить принимается ли слово x НКА M.
$M = (\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7\}, \{a, b, c\}$, программа P :
$\{q_1\ a \to q_2;\ q_1\varepsilon\ \to q_3;\ q_2b\ \to q_4;\ q_3b \to q_5;\ q_3b \to q_2;\ q_3\varepsilon \to q_4;$
$q_4a \to q_5;\ q_4\varepsilon \to q_6;\ q_5a \to q_6; q_5a \to q_3;\ q_6c \to q_7\}$,
нач. состояние - q_1, мн-во заключ. состояний - $\{q_7\}$).
Вход: $x = abaabbc$.

4-5. (45) Пусть дано множество W, состоящее из K различных строк (слов) суммарной длины n. Для каждого i от 2 до K определим $l(i)$ как длину самой длинной подстроки, входящей в не менее чем в i строк W. Задача состоит в том, чтобы построить таблицу из $(K-1)$-й строки, в которой для каждого i указано число $l(i)$ и какая-нибудь строка длины $l(i)$, входящая в $\geq i$ строк из W.

Указание. Построим объединенное суффиксное дерево T для множества W, в котором каждый лист имеет метку слова, суффикс которого в этом листе заканчивается. Для каждой внутренней вершины v обозначим через $C(v)$ число различных слов из W, суффиксы которых заканчиваются в поддереве с корнем v.

а) Предложите алгоритм вычисления значений $C(v)$ для всех внутренних вершин T за время $O(Kn)$.

б) Покажите, как, зная значения $C(v)$ для всех внутренних вершин, построить требуемую таблицу за время $O(n)$.

6. (15) Постройте "жадный"алгоритм, который находит оптимальное вершинное покрытие для графа, являющегося деревом, за линейное время.

7. (20) Докажите NP-полноту задачи "ГАМИЛЬТОНОВ ПУТЬ МЕЖДУ ДВУМЯ ВЕРШИНАМИ":
Вход: неориентированный граф $G = (V, E)$ и две вершины $a, b \in V$.
Вопрос: существует ли в G простой путь из a в b, проходящий по одному разу через все вершины графа.

Вариант 7

1. (15) Построить разделяющую ломанную и объединить диаграммы Вороного для следующих множеств точек.
$P_1 = \{(0, -5), (15, -10), (20, -5), (15, 5)\}$,
$P_2 = \{(25, 15), (35, 0), (45, 10)\}$.
Построить по получившейся диаграмме Вороного соответствующую триангуляцию Делоне.

2. (20) Предложите алгоритм сложности $O(n \log n)$ для решения задачи о покрытии прямоугольника: по набору прямоугольников $P_1, \ldots, P_n$ и по прямоугольнику Q определить, покрывает ли объединение всех $P_i, i = 1, \ldots, n$, прямоугольник Q (стороны всех $P_i, i = 1, \ldots, n$, и Q параллельны осям).
Указание: решите аналогичную задачу для одномерного случая и используйте затем метод заметающей прямой.

3. (15) Построить функции λ и γ для распознавания вхождения подслова $y = 01101201$ в текст методом Бойера-Мура. Используя их, найти вхождение y в слово $x = 011201101201012$.

4. (15) Пусть $y = b_1 b_2 ... b_n$. Доказать, что алгоритм ФОТ, вычисляет функцию отказов $f(j), 1 \leq j \leq n$, за линейное время $O(n)$.

5.(20) Требуется по двум словам S_1 и S_2 найти самое длинное слово P, которое входит как подслово и в S_1, и в S_2.
а) Докажите, что с использованием суффиксных деревьев эту задачу можно решить за время, линейное от $(|S_1| + |S_2|)$.
б) Используя предложенный алгоритм, найдите самое длинное общее подслово для слов $S_1 = abbba$ и $S_2 = baabba$.

6.(15) Предложите эффективный алгоритм, который находит раскраску неориентированного графа в 2 цвета (если такая раскраска существует). Оцените его сложность.

7. (20) Доказать, что следующая задача является NP-полной. ГАМИЛЬТОНОВО ПОПОЛНЕНИЕ: по графу $G = (V, E)$ и числу $k > 0$ определить, можно ли к E добавить k ребер, чтобы в графе появился гамильтонов цикл.

Вариант 8

1. (10) Опишите диаграмму Вороного для правильного n-угольника.

2. (25) Модифицируйте алгоритм построения выпуклого замыкания методом "разделяй и властвуй"та
чтобы он корректно работал и при следующих предположениях:
а) на одной вертикальной прямой может быть несколько точек;
б) на луче нижней (верхней) касательной может находиться ребро P_1 или P_2;
в) базис рекурсии завершается 3-я точками, лежащими на одной прямой.

3. (15) Пусть даны два слова-образца y_1 и y_2. Предложить алгоритм, который распознает входит ли одно из этих слов в слово $x = a_1 ... a_n$ за время $O(n + |y1| + |y2|)$.

Указание: использовать функцию отказов, совпадающую на общем префиксе слов y_1 и y_2. Рассмотрет
пример: $y_1 = abbabca$, $y2 = abbabba$.

4. (15) Построить функции λ и γ для распознавания вхождения подслова $y = 01001201$ в текст методом Бойера-Мура. Используя их, найти вхождение y в слово $x = 011201001201012$.

5. (25) Для заданных слов S_1 и S_2 нужно найти все подслова слова S_2 длины не меньше l, входящие в S_1.

Докажите, что с использованием суффиксных деревьев и эту задачу можно решить за время, линейное от $(|S_1| + |S_2|)$.

6. (10) Какой экземпляр задачи РАСКРАСКА соответствует следующей 3-КНФ:
$\Phi = (X \vee \neg Y \vee Z)\ \&\ (\neg X \vee \neg Y \vee U)\ \&\ (Y \vee \neg Z \vee \neg U)$?
Найдите соответствие между некоторым набором значений переменных, на котором Φ истинна и раскраской построенного графа.

7. (20) Доказать, что следующая задача ОСТОВ С ОГРАНИЧЕННЫМ ЧИСЛОМ ЛИСТЬЕВ является NP-полной.
Вход: неориентированный граф $G = V, E$ и целое положительное число k.
Вопрос: существует ли в G остовное дерево T с k листьями.

Вариант 9

1.(10) Построить триангуляцию многоугольника P, используя алгоритм III (удаление ушей). $P = \{(0,0),(5,-20),(10,-5),(15,-20),(25,-5),(30,10),(20,5),(30,20),(15,25),(20,15),$ $(5,15),(5,5)\}$.

2.(25) Докажите, что алгоритм НАИБОЛЬШИЙ_ ПУСТОЙ_КРУГ можно реализовать для входа $P = \{p_1,\dots,p_n\}$ за время $O(n\log n)$.
Указание: 1) установите, что ребро диаграммы Вороного пересекает не более 2-х ребер оболочки $\mathcal{H}(P)$, и что каждое ребро оболочки $\mathcal{H}(P)$ пересекает по крайней мере одно ребро диаграммы Вороного.
2)организуйте обход всех точек пересечения $\mathcal{H}(P)$ с ребрами диаграммы Вороного за время $O(n)$.

3. (25) Как расширить алгоритм моделирования НКА M, чтобы он находил в слове $x = a_1...a_n$ наименьшее k такое, что для некоторого j подслово $a_j...a_k$ принадлежит $L(M)$, и наименьшее из таких j.

4. (15) Оцените время работы алгоритма ПОДКА в алгоритме поиска подслов Морриса-Пратта.

5. (15) Построить с помощью алгоритма Укконена суффиксное дерево для слова $x = abbaab\$$. Определить с его помощью все позиции, в которых в x входит подслово ab.

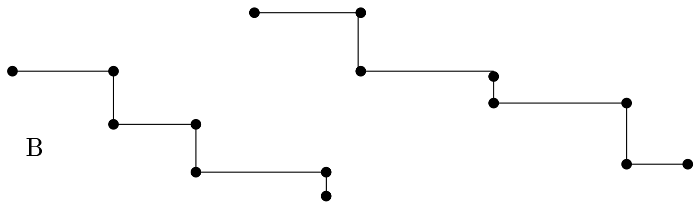
6.(20) Доказать, что следующая задача является NP-полной.
ИЗОМОРФНЫЙ ОСТОВ: по графу $G = (V,E)$ и дереву $T = (V',E')$ определить имеется ли в G остовное дерево, изоморфное T.
Указание: используйте для сведения задачу ГАМИЛЬТОНОВ ПУТЬ.

7. (15) Рассмотрим задачу РАЗБИЕНИЕ: по набору предметов $A = \{a_1,\dots,a_n\}$, и их весов $s(a_1),\dots s(a_n)$ найти такое подмножество $A' \subseteq A$, для которого $\sum_{a\in A'} s(a) = \sum_{a\notin A'} s(a)$. Пусть $\sum_{a\in A} s(a) = 2B$.
Используем для ее решения алгоритм "динамического программирования":
положим $t(i,j) = 1$, если среди первых i предметов $a_1,\dots,a_i$ можно выбрать подмножество общего веса j, иначе $t(i,j) = 0$. Напишите реккурентное соотношение для $t(i,j)$. Определите сложность решения задачи РАЗБИЕНИЕ, т.е. вычисления $t(n,B)$, через исходные параметры задачи. Явлется ли предложенный алгоритм полиномиальным?

Вариант 10

1. (10) Построить триангуляцию многоугольника P, используя алгоритм IV (через трапецизацию). $P = \{(0,0),(5,-25),(10,-5),(20,-20),(25,-10),(30,0),(20,15),(30,10),(25,20),(10,15),(5,5)\}$.

2. (25) Заданы две "лестницы" $A = \{p_1,\ldots,p_n\}$ и $B = \{q_1,\ldots,q_m\}$.



Найти пару точек (p_i, q_j) с минимальным L_1-расстоянием между ними, вычисляемым по формуле $d_1(p,q) = |p.x - q.x| + |p.y - q.y|$.

3. (15) Построить для заданного регулярного выражения R НКА M, допускающий язык $L(R)$, задаваемый R. Найти с помощью алгоритма моделирования НКА первое вхождение слова из $L(R)$ в слово x.
$R = b(ba + bb)^*(b + aa),\ x = ababbabaaaba$.

4. (20) Доказать корректность алгоритма Морриса-Пратта, т.е. то, что ДКА M, построенный алгоритмом ПОДКА, на входе $x = a_1a_2\ldots a_k$ перейдет в состояние j тогда и только тогда, когда $b_1b_2\ldots b_j$ — это самый длинный суффикс x, являющийся префиксом $y = b_1b_2\ldots b_l$.

5. (20) Поиск всех вхождений слов-образцов.

Пусть задано множество слов-образцов $\mathcal{P} = \{U_1,\ldots,U_k\}$, суммарная длина которых равна n. Требуется найти все вхождения этих образцов в текст S длины m. Докажите, что это можно сделать с использованием суффиксного дерева за время $O(n+m+r)$, где r — общее число искомых вхождений.

6. (10) Какая задача РАЗБИЕНИЕ соответствует следующей задаче 3-СОЧЕТАНИЕ: $W = \{w1, w2\}, X = \{x1, x2\}$, $Y = \{y1, y2\}$, $M = \{< w1, x1, y2 >, < w1, x2, y2 >, < w2, x2, y1 >\}$.
Найдите соответствие между некоторым совершенным 3-сочетанием и разбиением.

7. (20) Предположим, что имеется алгоритм A, который по булевой формуле Φ проверяет выполнима ли она за время $t(\Phi)$. Как с его помощью найти выполняющий набор значений переменных для Φ (если он существует) за время полиномиальное от $t(\Phi)$?

Вариант 11

1. (10) Построить разделяющую ломанную и объединить диаграммы Вороного для следующих множеств точек.
$P_1 = \{(0,0),(10,-15),(5,15),(15,0)\}$,
$P_2 = \{(20,20),(30,5),(45,15)\}$.

2. (25) На плоскости заданы два множества точек A и B, содержащие по n точек каждое. Предложите алгоритм, который находит две ближайшие точки, одна из которых принадлежит A, а другая B, за время $O(n \log n)$. Можно ли построить более эффективный алгоритм, если A и B линейно разделимы?

3. (15) Построить функцию отказов и ДКА для распознавания вхождения подслова $y = dccdcc$. Используя этот ДКА, найти вхождение y в слово $x = dcddcdccdccdc$.

4.(20) Доказать корректность алгоритма Боейра-Мура.

5. (20) Поиск вхождений слов в базу данных.

Пусть база данных содержит слова общей суммарной (большой!) длиной n. Предложите структуру данных для этой БД и алгоритм ее построения, обеспечивающие эффективное выяснение по слову-запросу P входит ли оно в базу данных, а если не входит, то определение всех слов БД, для которых оно является префиксом, а если и таких слов нет, то нахождение самого длинного префикса P, являющегося префиксом какого-либо слова в базе данных.

6.(10) Какая задача РАСКРАСКА соответствует следующей 3-КНФ:
$\Phi = (X \vee \neg Y \vee Z)\&(\neg X \vee \neg Y \vee U)\&(Y \vee \neg Z \vee \neg U)$?
Найдите соответствие между некоторым набором значений переменных, на котором Φ истинна и раскраской построенного графа в 4 цвета.

7. (20) Доказать, что построенная при доказательстве теоремы Кука булева формула $F = F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \wedge F_4 \wedge F_5 \wedge F_6 \wedge F_7$, описывающая работу м.Т. M на входе x, имеет полиномиальный от $|x|$ размер и может быть построена за полиномиальное время.

Вариант 12

1. (15) Детализируйте алгоритм построения выпуклой оболочки методом "заворачивания подарка", используя процедуры *Слева, Пересекаются и др.* Оцените сложность полученного алгоритма.

2. (20) *Обращение диаграммы Вороного.* На плоскости задана карта с n вершинами степени 3 (ребрами являются отрезки и лучи). Предложите эффективный алгоритм, проверяющий, является ли эта карта диаграммой Вороного для некоторого конечного множества точек P. В случае положительно ответа алгоритм должен построить P в явном виде.

3. (15) Построить функцию отказов и ДКА для распознавания вхождения подслова $y = 1001001$. Используя этот ДКА, найти вхождение y в слово $x = 0100010010011$.

4. (20) Предположим, что к заданному множеству слов $M = w_1, \ldots, w_m$ общей длины n добавляется новое слово или из него удаляется некоторое слово. Предложите алгоритмы, которые на объединенном суффиксном дереве T, построенном для M, эффективно выполняют эти операции.

5. (25) Пусть T — суффиксное дерево для слова S. Для каждой позиции i слова S назовем символ $S(i-1)$ левым символом для i. Левый символ для листа дерева T — это левый символ позиции-метки этого листа.

Внутренняя вершина v дерева T называется *левой вилкой* (left diverse), если хотя бы два листа в поддереве с корнем v имеют различные левые символы.

Постройте алгоритм сложности $O(n)$, который для каждой вершины T определит, является ли она левой вилкой.

6. (10)Какая задача 3-СОЧЕТАНИЕ соответствует следующей 3-КНФ: $\Phi = (X \vee Y \vee Z) \& (X \vee Y \vee Z)$? Найдите соответствие между некоторым набором значений переменных, на котором Φ истинна и совершенным 3-сочетанием.

7. (15) Докажите NP-полноту задачи УПАКОВКА В КОНТЕЙНЕРЫ:
Вход: задано конечное множество предметов $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$, целочисленный объем $s(u_i), i = 1, \ldots, n$, каждого из этих предметов, целое число B – объем одного контейнера и число имеющихся контейнеров k.
Вопрос: можно ли все предметы из U упаковать в k контейнеров?

Вариант 13

1. (20) Предложите структуру данных для хранения информации о "заметающей"прямой в алгоритме трапецизации многоугольника и опишите алгоритм изменения этой информации при пересечении прямой очередной вершины (используйте в нем процедуры *Слева, Пересекаются и др.*)

2.(15) Построить разделяющую ломанную и объединить диаграммы Вороного для следующих множеств точек.
$P_1 = \{(0,0),(15,-10),(20,15)\}$,
$P_2 = \{(30,15),(35,0),(45,10)\}$.
Построить по получившейся диаграмме Вороного соответствующую триангуляцию Делоне.

3. (20) Доказать, что алгоритм моделирования НКА M корректен, т.е. для каждого i множество построенных на шаге i состояний определяется равенством $S_i = \{q \mid (q_0; a_1a_2...a_i) \vdash (q,\epsilon)\}$.

4. (15) Используя алгоритм Рабина-Карпа, найти все вхождения слова $y = 31$ в слово $x =$ 12314159203158263137 (пусть простое число $q = 11$, мощность алфавита $m = 10$).

5. (20) Докажите, что с использованием суффиксных ссылок и трюков 1-3 алгоритм Укконена строит последовательность неявных суффиксных деревьев $I_1,\dots,I_n$ для слова длины n за время $O(n)$.

6. (20) Докажите NP-полноту задачи РАСПИСАНИЕ ДЛЯ МНОГОПРОЦЕССОРНОЙ СИСТЕМЫ.
Вход: множество заданий $A = \{a_1,\dots,a_n\}$, для каждого из которых $a \in A$ указана длительность $l(a)$ его выполнения, число процессоров m и граница времени выполнения всех заданий D.
Вопрос: существует ли распределение всех заданий по m процессорам, при котором все они будут завершены за время $\leq D$? Иначе говоря, можно ли разбить A на m подмножеств $A_1,\dots,A_m$ так, что для каждого $j = 1,\dots,m$ $\sum_{a\in A_j} l(a) \leq D$?

7. (10) Какой экземпляр задачи РАСКРАСКА соответствует следующей 3-КНФ:
$\Phi = (\neg X \vee Y \vee Z)\ \&\ (X \vee \neg Y \vee U)\ \&\ (\neg Y \vee \neg Z \vee \neg U)$?
Найдите соответствие между некоторым набором значений переменных, на котором Φ истинна и раскраской построенного графа.

Вариант 14

1. (10) Сколько охранников достаточно для охраны следующей галереи
$P = \{(0,0),(10,-15),(15,-10),(20,-20),(25,0),(30,0),(20,5),$
$(30,20),(15,25),(20,15),(10,15),$
$(5,5)\}$ по теореме о $G(n)$? Какова оптимальная расстановка охранников для этой галереи?

2. (20) Предложите алгоритм, который по триангуляции Делоне $\mathcal{D}(P)$ строит диаграмму Вороного $\mathcal{V}(P)$. Какова его сложность? (Хорошо бы получить алгоритм сложности $O(n)$).

3. (15) Построить для заданного регулярного выражения R НКА M, допускающий язык $L(R)$, задаваемый R. Найти с помощью алгоритма моделирования НКА все вхождения слов из $L(R)$ в слово x.
$R = aa(ba+b)^*(a+ab),\ x = baababaaabbaba.$

4. (20) Доказать корректность алгоритма Морриса-Пратта, т.е. то, что ДКА M, построенный алгоритмом ПОДКА, на входе $x = a_1a_2\ldots a_k$ перейдет в состояние j тогда и только тогда, когда $b_1b_2\ldots b_j$ — это самый длинный суффикс x, являющийся префиксом $y = b_1b_2\ldots b_l$.

5.(20) Требуется по двум словам S_1 и S_2 найти самое длинное слово P, которое входит как подслово и в S_1, и в S_2.

а) Докажите, что с использованием суффиксных деревьев эту задачу можно решить за время, линейное от $(|S_1| + |S_2|)$.

б) Используя предложенный алгоритм, найдите самое длинное общее подслово для слов $S_1 = cabbba$ и $S_2 = bcaabbbb$.

6.(10) Какое уравнение в словах соответствует следующей 3-КНФ:
$\Phi = (X \vee Y \vee Z) \wedge (X \vee Y \vee \neg U) \wedge (\neg Y \vee Z \vee U)$? Найдите соответствие между некоторым набором значений переменных, на котором Φ истинна и решением соответствующего уравнения в словах.

7. (20) Докажите NP-полноту задачи ЦЕЛОЧИСЛЕННОЕ ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ.
Вход: целочисленная матрица A размера $n \times m$, целочисленный вектор-столбец $\bar{b}$ размера $n \times 1$, вектор переменных $\bar{x}$ размера $1 \times m$.
Вопрос: имеет ли система уравнений $A\bar{x} = \bar{b}$ целочисленное решение $(x_1, \ldots, x_m)$, в котором каждое значение $x_i \in \{0,1\}$ $(i = 1, \ldots, m)$?

Вариант 15

1. (10) Найдите наилучший случай расположения n точек для алгоритма построения выпуклого замыкания методом "заворачивания подарка". Какова его минимальная сложность как функция от n?

2.(25) Докажите, что алгоритм НАИБОЛЬШИЙ_ ПУСТОЙ_КРУГ можно реализовать для входа $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ за время $O(n \log n)$.
Указание: 1) установите, что ребро диаграммы Вороного пересекает не более 2-х ребер оболочки $\mathcal{H}(P)$, и что каждое ребро оболочки $\mathcal{H}(P)$ пересекает по крайней мере одно ребро диаграммы Вороного.
2)организуйте обход всех точек пересечения $\mathcal{H}(P)$ с ребрами диаграммы Вороного за время $O(n)$.

3. (15) Вычислите используемые в алгоритме Бойера-Мура функции λ и γ для слова-образца $y = acabbacabb$ и найдите с помощью этого алгоритма первое вхождение y в слово $x = acabbbcabbbacabbacabbacabbcabb.$

4. (25) Как расширить алгоритм моделирования НКА M, чтобы он находил в слове $x = a_1 ... a_n$ наименьшее k такое, что для некоторого j подслово $a_j ... a_k$ принадлежит $L(M)$, и наибольшее из таких j.

5.(20) Пусть задано циклическое слово $S[1..n]$, в котором за каждым символом $S(i)$ следует символ $S(i + 1 \mod n)$. Задача состоит в том, чтобы выбрать место разрезания этого слова i так, чтобы получившееся линейное слово $S^i = S(i) \ldots S(n)S(1) \ldots S(i-1)$ было лексикографически минимальным среди всех таких линейных слов. Предложите алгоритм линейной сложности для линеаризации циклических слов.
Указание: используйте суффиксное дерево для слова LL, где L — произвольная линеаризация S.

6. (10) Для экземпляра задачи ОРИЕНТ_ГАМИЛЬТОНОВ_ЦИКЛ $G = (V = \{1, 2, 3, 4, 5\},\ E = \{(1, 4), (2, 3), (4, 2), (4, 3), (3, 5), (5, 1)\})$ построить эквивалентный экземпляр G' задачи НЕОРИЕНТ_ГАМИЛЬТОНОВ_ЦИКЛ и для некоторого гамильтонова цикла в G указать соответствующий гамильтонов цикл в G'.

7. (20) Докажите NP-полноту задачи ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЙ ПОТОК В СЕТИ С УМНОЖИТЕЛЯМИ
Вход: сеть $S = ((V, E), s, t, c : E \to N, h : V \to N)$, где $c(e)$ – пропускная способность ребра $e \in E$, $h(v)$ – коэффициент увеличения потока в вершине $v \in V$ и граница потока B.
Вопрос: существует ли целочисленная потоковая функция $f : E \to N$ такая, что
1) $f(e) \leq c(e)$ для всех $e \in E$;
2) для любой $v \in V \setminus \{s, t\}$ имеет место равенство $h(v) \sum_{(u,v) \in E} f(u, v) = \sum_{(v,u) \in E} f(v, u)$;
3) $\sum_{(u,t) \in E} f(u, t) \geq B$.
Указание: сведите к этой задаче проблему РАЗБИЕНИЕ.

Вариант 16

1. (10) Как по списку вершин многоугольника определить в каком порядке они идут: по часовой стрелке или против часовой стрелки.

2. (25) Модифицируйте алгоритм построения выпуклого замыкания методом "разделяй и властвуй"та
чтобы он корректно работал и при следующих предположениях:
а) на одной вертикальной прямой может быть несколько точек;
б) на луче нижней (верхней) касательной может находиться ребро P_1 или P_2;
в) базис рекурсии завершается 3-я точками, лежащими на одной прямой.

3. (15) Построить функцию отказов и ДКА для распознавания вхождения подслова $y = acacaac$. Используя этот ДКА, найти вхождение y в слово $x = cacaccacacaacac$.

4. (15) Построить с помощью алгоритма Укконена суффиксное дерево для слова $x = aacbaacb\$$. Определить с его помощью все позиции, в которых в x входит подслово acb.

5. (25) Предположим, что к заданному множеству слов $M = w_1, \ldots, w_m$ общей длины n добавляется новое слово или из него удаляется некоторое слово. Предложите алгоритмы, которые на объединенном суффиксном дереве T, построенном для M, эффективно выполняют эти операции.

6. (10) Существует ли такая рекурсивная функция F, которая задает "границу"разрыва между верхними и нижними оценками времени вычислений, т.е. такая, что для любого вычислимого предиката A имеется такая граница времени t, что A нельзя вычислить за время $\leq t(n)$, но можно - за время $F(t(n))$?

7. (20) Доказать, что следующая задача является NP-полной. ГАМИЛЬТОНОВО ПОПОЛНЕНИЕ: по графу $G = (V, E)$ и числу $k > 0$ определить, можно ли к E добавить k ребер, чтобы в графе появился гамильтонов цикл.

Вариант 17

1.(10) Построить триангуляцию многоугольника P, используя алгоритм III (удаление ушей). $P = \{(0,0),(5,20),(10,5),(15,-10),(25,-5),(30,-15),(25,5),(30,0),(15,25),(20,15),$
$(5,35),(0,5)\}$.

2. (25) На плоскости заданы два множества точек A и B, содержащие по n точек каждое. Предложите алгоритм, который находит две ближайшие точки, одна из которых принадлежит A, а другая B, за время $O(n \log n)$. Можно ли построить более эффективный алгоритм, если A и B линейно разделимы?

3. (15) Используя алгоритм Рабина-Карпа, найти все вхождения слова $y = 24$ в слово $x =$ 12412415924031582437 (пусть простое число $q = 11$, мощность алфавита $m = 10$).

4. (15) Оцените время работы алгоритма ПОДКА в алгоритме поиска подслов Морриса-Пратта.

5. (20) Поиск вхождений слов в базу данных.

Пусть база данных содержит слова общей суммарной (большой!) длиной n. Предложите структуру данных для этой БД и алгоритм ее построения, обеспечивающие эффективное выяснение по слову-запросу P входит ли оно в базу данных, а если не входит, то определение всех слов БД, для которых оно является префиксом, а если и таких слов нет, то нахождение самого длинного префикса P, являющегося префиксом какого-либо слова в базе данных.

6. (15) Постройте "жадный"алгоритм, который находит оптимальное вершинное покрытие для графа, являющегося деревом, за линейное время.

7. (20) Докажите NP-полноту задачи РАЗБИЕНИЕ НА ТРЕУГОЛЬНИКИ: Вход: неориентированны граф G=(V,E), такой, что для некоторого целого q: $|V| = 3q$.
Вопрос: можно ли разбить вершины графа G на q непересекающихся множеств $V_1, \ldots, V_q$, каждое из которых содержит ровно 3 вершины, попарно соединенных ребрами, т.е. для каждого $i = 1, \ldots, q$
$V_i = \{u_i, v_i, w_i\}$ и $(u_i, v_i), (v_i, w_i), (w_i, u_i) \in E$.
(Указание: к этой задаче сводится задача 3-СОЧЕТАНИЕ).