Вариант 1

1. Найти сильно связные компоненты ориентированного графа $G = (V, E)$:
$V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$;
$E = \{(a, f), (b, d), (g, h), (h, f), (f, g), (d, c), (c, b), (g, d), (a, e), (e, a)\}$.
(10)

2. Построить алгоритм, который распознавал бы, есть ли в данном ориентированном графе, ребрам которого приписаны положительные и отрицательные стоимости, цикл отрицательной стоимости. (Указание: модифицируйте алгоритм Уоршолла-Флойда).
(20)

3. Найти максимальное паросочетание в двудольном графе, используя сведение к задаче о максимальном потоке для простой сети. $G =< \{v1, v2, v3, v4\}, \{u1, u2, u3, u4, u5\}$,
$E = \{(v1, u3), (v1, u4)$,
$(v1, u5), (v2, u2), (v3, u1), (v3, u2), (v4, u2)\}$.
(15)

4. Предложите алгоритм для процедуры ПРОТЯНУТЬ и оцените его сложность.
(20)

5. Пусть $G = (V, E)$ — двудольный граф с равномощными долями, т.е. $V = X \cup Y,\ X \cap Y = \emptyset$ и $|X| = |Y|$. *Совершенным паросочетанием* в таком графе называется паросочетание, в которое входят все вершины. Для каждого подмножества вершин $U \subseteq V$ определим множество соседних вершин $N(U) = \{w | \exists u \in U[(u, w) \in E]\}$. Докажите, что в G существует совершенное паросочетание тогда и только тогда, когда для любого $A \subseteq X$ выполнено $|A| \leq |N(A)|$ (теорема Холла).
(25)

6. Используя алгоритм 4Р, вычислить произведение булевых матриц $C = A * B$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(15)

7. Предположим, что существует алгоритм, вычисляющий произведение двух 5x5 матриц, используя 50 операций умножения и 120 операций сложения. Алгоритм какой сложности для умножения $n \times n$ матриц можно было бы тогда получить? Был бы он лучше алгоритма Штрассена?
(15)

8. В док-ве теоремы о связи задач умножения матриц и транзитивного замыкания графов матрица инцидентности графа с $n = 2 * k$ вершинами X разбивалась на 4 подматрицы:

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

Пусть матрица транзитивного замыкания

$$T(X) = \begin{pmatrix} F & E \\ G & H \end{pmatrix}$$

Покажите, что $G = T(D) \times C \times F$, где $T(D)$ — транзитивное замыкание матрицы D.
(20)

Вариант 2

1. Используя алгоритм Уоршолла-Флойда, найдите кратчайшие расстояния между вершинами графа с матрицей расстояний :

$$C = \begin{array}{ccccc} - & 8 & 3 & - & 12 \\ - & - & 9 & 2 & 6 \\ 7 & 4 & - & - & 8 \\ - & 1 & 6 & - & - \\ - & - & 1 & 5 & - \end{array}$$

(знак '-' означает отсутствие соответствующего ребра).

2. Транзитивная редукция ориентированного графа $G = (V, E)$ — это граф $G' = (V, E')$ с минимальным числом ребер, транзитивное замыкание которого совпадает с транзитивным замыканием G. Постройте алгоритм нахождения транзитивной редукции ориентированного графа и оцените его сложность.
(20)

3. Используя алгоритм Форда-Фалкерсона, построить максимальный поток для сети N :
$\{(s, v1, 7), (s, v2, 2), (s, v3, 3), (v1, v2, 4), (v1, t, 2), (v2, v3, 2), (v2, t, 3), (v3, t, 6)\}$.
(15)

4. Предложите алгоритм, который по сети N и максимальному потоку в ней f_m находит такое ребро, увеличение пропускной способности которого приводит к увеличению максимального потока. Оцените его сложность.
(20)

5. Назовем *запасом связности* неориентированного графа минимальное число ребер, которые необходимо удалить, чтобы сделать его несвязным. Например, для дерева это число равно 1, для простого цикла — 2. Чему оно равно для полного n-вершинного графа? Какова сложность "переборного"алгоритма для нахождения запаса связности? Постройте алгоритм вычисления запаса связности по графу, использующий сведение этой задачи к задаче нахождения максимального потока и оцените его сложность.
(20)

6. Найти НВП-разложение матрицы А:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(20)

7. Предположим, что мы умеем перемножать две (3 x 3) матрицы, используя k умножений. Какова тогда сложность умножения матриц размера $(n \times n)$ (как при использовании метода Штрассена)? При каком k это позволило бы улучшить оценку Штрассена?
(15)

8. Пусть при вычислении произведения булевых матриц можно использовать операции над двоичными векторами. Показать, что алгоритм 4Р можно с использованием таких операций выполнить за $O(n^2/\log n)$ шагов.
(20)

Вариант 3

1.Определить, используя алгоритм Беллмана-Форда, для заданного ориентированного нагруженного графа $G = (V, E)$ и выделенной вершины a длины кратчайших путей из этой вершины в остальные вершины G и построить дерево этих путей либо выявить достижимый из цикл отрицательной длины.
$V = \{a, b, c, d, e\}$, $E = \{(a, b; 12), (a, c; 25), (a, d; 40), (a, f; 25), (d, e; -15), (b, c; 12), (b, d; 25), (b, e; 10), (c, d; 10), (c, f; -4), (f, b; -10)\}$,
(здесь каждая скобка $(u, v; D)$ задает ребро $(u, v) \in E$ и его "вес"$c(u, v) = D$).
(10)

2. Докажите, что в ациклическом ориентированном графе G, алгоритм ПОГ+post (с нумерацией после вызова процедуры ПОИСК) нумерует вершины в обратном топологическом порядке (т.е. если $HOM(v) < HOM(u)$, то в графе нет пути из v в u).
(20)

3. Построить вспомогательную сеть и тупиковый поток в ней для следующей сети (формат: $(v, u, c(v, u), f(v, u)))$: $(s, v1, 7, 5), (s, v4, 3, 2), (s, v6, 3, 2), (v1, v2, 6, 5), (v2, v3, 8, 4)$, $(v2, v4, 2, 1)$, $(v2, v5, 4, 3), (v3, v5, 3, 1), (v3, t, 4, 3), (v5, t, 6, 5)$, $(v5, v7, 1, 1), (v7, t, 2, 1)$.
(15)

4. Доказать, что длины всех путей из s в t во вспомогательной сети $AN(f)$ одинаковы и равны длине кратчайшего увеличивающего пути в N с потоком f.
(20)

5. По договору с рестораном поставщик должен обеспечивать поставку d_i сафеток в i-ый день в течение n дней. Салфетки можно покупать по цене a рублей за штуку или отдавать в стирку старые салфетки. Обычная стирка одной салфетки стоит b руб. и требует двух дней, экспресс-стирка одной салфетки обходится в c руб. и они готовы через один день. Определить оптимальную политику поставщика по закупке и стирке салфеток (т.е. политику, минимизирующую его затраты). Оценить сложность получившегося алгоритма.
(25)

6. Используя НВП-разложение решить систему линейных уравнений:
$3z + u = 10$
$3u = 21$
$x - y + u = 11$
$2x + 3y = -2.$
(20)

7. Предположим, что существует алгоритм, вычисляющий произведение двух 4х4 матриц, используя 50 операций умножения и 120 операций сложения. Алгоритм какой сложности для умножения $n \times n$ матриц можно было бы тогда получить? Был бы он лучше алгоритма Штрассена?
(15)

8. В док-ве теоремы о связи задач умножения матриц и транзитивного замыкания графов матрица инцидентности графа с $n = 2 * k$ вершинами X разбивалась на 4 подматрицы:

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

Пусть матрица транзитивного замыкания

$$T(X) = \begin{pmatrix} F & E \\ G & H \end{pmatrix}$$

Покажите, что $E = F \times B \times T(D)$, где $T(D)$ — транзитивное замыкание матрицы D.
(20)

Вариант 4

1. Найти минимальное остовное дерево для неориентированного графа $G = (V, E)$, где $V = \{v1, v2, v3, v4, v5, v6, v7, v8, v9\}$, $E = \{(v1, v2, 18), (v1, v3, 2), (v3, v2, 4), (v3, v4, 6), (v3, v5, 8), (v4, v6, 5), (v5, v4, 4), (v6, v1, 7), (v6, v8, 4), (v6, v7, 3), (v7, v5, 1), (v7, v8, 7), (v8, v1, 5), (v8, v9, 3), (v9, v1, 1)\}$ (третий параметр в скобках - длина ребра).
(10)

2. Пусть $G = (V, E)$ – это ориентированный взвешенный граф с весовой функцией $c : E \to \{0, 1, \ldots, M-1\}$, где $M > 0$ – целое число. Модифицировать алгоритм Дейкстры, чтобы он находил в таком случае кратчайшие пути из одной вершины за время $O(M * |V| + |E|)$ (еще лучше получить сложность $O(|V| + |E| \log M)$).
(20)

3. Построить, используя алгоритм МАХП, максимальный поток для следуюшей сети (формат: $(v, u, c(v, u))$): $(s, v_1, 6), (s, v_2, 2), (s, v_3, 5), (v_1, v_4, 2), (v_2, v_5, 3), (v_3, v_6, 3), (v_6, v_2, 2), (v_4, t, 3), (v_5, t, 5)$, $(v_1, v_5, 3), (v_6, t, 2)$.
(15)

4. Предположим, что известен максимальный поток f_m в сети $N = (V, E, s, t; c)$ и пропускные способности всех ребер — целые числа.

Предположим, что пропускная способность некоторого ребра (u, v) увеличилась на 1: $c'(u, v) = c(u, v) + 1$. Предложите алгоритм, находящий максимальный поток для измененной сети за время $O(|V| + |E|)$.
(20)

5. Пусть есть n мужчин, n женщин и m брачных контор, каждая из которых имеет список мужчин и женщин, являющихся ее клиентами (списки разных контор могут пересекаться), между любой парой которых она может устроить брак. Для каждой конторы $i, 1 \leq i \leq m$, задано максимальное число $b(i)$ браков, которое она может устроить. Построить сеть, максимальный поток в которой соответствует нахождению максимального числа возможных браков.
(20)

6. Используя алгоритм Штрассена для некоторого (какого?) кольца, вычислить произведение булевых матриц $C = A * B$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(15)

7. Предположим, что существует алгоритм, вычисляющий произведение двух 6x6 матриц, используя 100 операций умножения и 200 операций сложения. Алгоритм какой сложности для умножения $n \times n$ матриц можно было бы тогда получить? Был бы он лучше алгоритма Штрассена?
(15)

8. Пусть P и A — две $(n \times n)$ матрицы, причем P — это матрица перестановки. Докажите, что матрица PA получается из A перестановкой строк, а AP — перестановкой столбцов. Докажите, что P обратима и $P^{-1} = P^T$ (обратная равна транспонированной).
(20)

Вариант 5

1. Построить с помощью поиска в ширину остовной лес для неориентированного графа $G = (V, E)$, где
$V = \{v1, v2, v3, v4, v5, v6, v7, v8, v9, v10, v11\}$,
$E = \{(v1, v2), (v1, v5), (v1, v6), (v2, v6), (v3, v4), (v4, v7), (v3, v7), (v8, v3), (v3, v11), (v8, v7), (v8, v11)(v9, v10).\}$
Применить к этому же графу поиск в глубину и определить соответствующую нумерацию.
(10)

2. Докажите корректность алгоритма построения кратчайших путей из одной вершины для ориентированных ациклических графов и выведите оценку $O(|V| + |E|)$ его сложности.
(20)

3. Найти максимальное паросочетание в двудольном графе G, используя сведение к задаче о максимальном потоке для простой сети. $G =< \{v1, v2, v3, v4\}, \{u1, u2, u3, u4, u5\}$,
$E = \{(v1, u4), (v1, u5), (v2, u1), (v2, u2), (v2, u3), (v3, u1), (v3, u4), (v4, u4)\} >$.
(15)

4. Предположим, что известен максимальный поток f_m в сети $N = (V, E, s, t; c)$ и пропускные способности всех ребер — целые числа.

Предположим, что пропускная способность некоторого ребра (u, v) уменьшилась на 1: $c'(u, v) = c(u, v) - 1$. Предложите алгоритм, находящий максимальный поток для измененной сети за время $O(|V| + |E|)$.
(20)

5. Формализуйте алгоритм построения устойчивого паросочетания и докажите, что он всегда завершается и выдает требуемый результат.
(25)

6. Используя алгоритм 4Р, вычислить произведение булевых матриц $C = A * B$:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
(15)

7. Предположим, что мы умеем перемножать две (7 x 7) матрицы, используя k умножений. Какова тогда сложность умножения матриц размера $(n \times n)$ (как при использовании метода Штрассена)? При каком k это позволило бы улучшить оценку Штрассена?
(15)

8. В док-ве теоремы о связи задач умножения матриц и транзитивного замыкания графов матрица инцидентности графа с $n = 2 * k$ вершинами X разбивалась на 4 подматрицы:
$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$
Пусть матрица транзитивного замыкания
$$T(X) = \begin{pmatrix} F & E \\ G & H \end{pmatrix}$$
Покажите, что $G = T(D) \times C \times F$, где $T(D)$ — транзитивное замыкание матрицы D.
(20)

Вариант 6

1.Определить, используя алгоритм Дейкстры, для заданного ориентированного нагруженного графа $G = (V, E)$ и выделенной вершины a длины кратчайших путей из этой вершины в остальные вершины G и построить дерево этих путей.
$V = \{a, b, c, d, e\}$,
$E = \{(a, b; 12), (a, c; 16), (a, d; 15), (a, e; 35), (b, d, 2), (b, c; 4), (b, e; 10), (c, e; 10), (c, a; 3), (d, e; 15)\}$,
(здесь каждая скобка $(u, v; D)$ задает ребро $(u, v) \in E$ и его "вес"$c(u, v) = D$).
(10)

2. Пусть в результате выполнения алгоритма ПОГ на ориентированном графе $G = (V, E)$ дуга (v, w) оказалась поперечной, т.е. v и w не являются потомками друг друга в построенном остовном лесе T. Доказать, что тогда $NUM[v] > NUM[w]$.
(20)

3. Используя алгоритм Форда-Фалкерсона, построить максимальный поток для сети N :
$\{(s, v1, 6), (s, v2, 2), (s, v3, 5), (v1, v3, 3), (v1, t, 2), (v3, v2, 1), (v2, t, 4), (v3, t, 4)\}$.
(15)

4. Предложите алгоритм, который по сети N и максимальному потоку в ней f_m находит такое ребро, уменьшение пропускной способности которого приводит к уменьшению максимального потока. Оцените его сложность.
(20)

5. Пусть обобщенная сеть - это сеть, в которой имеется несколько источников – вершин $s_1, \ldots, s_k$, в которые не вхдят дуги, и несколько стоков – вершин $t_1, \ldots, t_m$, из которых не выходят дуги. Показать, что задачу о максимальном потоке в обобщенной сети можно свести к задаче о максимальном потоке в "обычной"сети.
(20)

6. Найти НВП-разложение матрицы A:
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
(20)

7. Предположим, что существует алгоритм, вычисляющий произведение двух 10x10 матриц, используя 750 операций умножения и 1220 операций сложения. Алгоритм какой сложности для умножения $n \times n$ матриц можно было бы тогда получить? Был бы он лучше алгоритма Штрассена?
(15)

8. В док-ве теоремы о связи задач умножения матриц и транзитивного замыкания графов матрица инцидентности графа с $n = 2 * k$ вершинами X разбивалась на 4 подматрицы:
$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$
Пусть матрица транзитивного замыкания
$$T(X) = \begin{pmatrix} F & E \\ G & H \end{pmatrix}$$
Покажите, что $E = F \times B \times T(D)$, где $T(D)$ — транзитивное замыкание матрицы D.
(20)

Вариант 7

1.Определить, используя алгоритм Беллмана-Форда, для заданного ориентированного нагруженного графа $G = (V, E)$ и выделенной вершины a длины кратчайших путей из этой вершины в остальные вершины G и построить дерево этих путей либо выявить достижимый из а цикл отрицательной длины.
$V = \{a, b, c, d, e\}$, $E = \{(a, b; 12), (a, c; 25), (a, d; 40), (a, f; 25), (d, e; -15), (b, c; 12), (b, d; 25),$
$(b, e; 10), (c, d; 10), (c, f; -4), (f, b; -10)\}$,
(здесь каждая скобка $(u, v; D)$ задает ребро $(u, v) \in E$ и его "вес"$c(u, v) = D$).
(10)

2. Рассмотрите модификацию алгоритма ПОШ для ориентированного графа $G = (V, E)$, в которой для каждой v из V задан список соседей $L_v = \{w|(v, w) \in E\}$, в строку 5 добавлен оператор $T := \{\}$, а в строку 12 добавлен оператор $T := T \cup \{(w, u)\}$; Покажите, что полученный алгоритм нумерует все вершины графа и строит остовной лес T.
(20)

3. Построить вспомогательную сеть и тупиковый поток в ней для следующей сети (формат: $(v, u, c(v, u), f(v, u))) : (s, v1, 7, 6), (s, v4, 3, 2), (s, v6, 3, 2), (v1, v2, 7, 6), (v2, v3, 8, 4),$ $(v2, v6, 2, 2),$
$(v2, v5, 4, 3), (v3, v5, 3, 1), (v3, t, 4, 3), (v5, t, 6, 5),$ $(v5, v7, 1, 1), (v7, t, 2, 1)$.
(15)

4. Показать, что для простой сети N с потоком f , имеющим значения 0 или 1, вспомогательная сеть $AN(f)$ является простой.
(20)

5. Предположим, что известен максимальный поток f_m в сети $N = (V, E, s, t; c)$ и пропускные способности всех ребер — целые числа. Предположим, что пропускная способность некоторого ребра (u, v) увеличилась на 1: $c'(u, v) = c(u, v)+1$. Предложите алгоритм, находящий максимальный поток для измененной сети за время $O(|V| + |E|)$. Предложите также алгоритм, решающий ту же задачу в случае уменьшения пропускной способности ребра (u, v) на 1. (20)

6. Используя НВП-разложение решить систему линейных уравнений:
$3z + u = -2$
$3u = 12$
$x - y + u = 1$
$2x + 2z = -6$.
(20)

7. Предположим, что мы умеем перемножать две (5 x 5) матрицы, используя k умножений. Какова тогда сложность умножения матриц размера $(n \times n)$ (как при использовании метода Штрассена)? При каком k это позволило бы улучшить оценку Штрассена?
(15)

8. В док-ве теоремы о связи задач умножения матриц и транзитивного замыкания графов матрица инцидентности графа с $n = 2 * k$ вершинами X разбивалась на 4 подматрицы:

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

Пусть матрица транзитивного замыкания

$$T(X) = \begin{pmatrix} F & E \\ G & H \end{pmatrix}$$

Покажите, что $H = T(D) + T(D)F \times C \times F \times B \times T(D)$, где $T(D)$ — транзитивное замыкание матрицы D.
(20)

Вариант 8

1. Построить с помощью поиска в ширину остовной лес для ориентированного графа $G = (V, E)$, где $V = \{v1, v2, v3, v4, v5, v6, v7, v8, v9, v10, v11\}$, $E = \{(v1, v2), (v1, v5), (v1, v6), (v2, v6), (v4, v3), (v4, v7), (v3, v7), (v8, v3), (v8, v11), (v8, v7), (v8, v10)(v9, v10)\}$.
Применить к этому же графу поиск в глубину и определить соответствующую нумерацию.
(10)

2. Пусть $S =< V, T >$ – остовное дерево наименьшей стоимости нагруженного неориентированного графа $G =< V, E >$, $|V| = n + 1$, построенное алгоритмом Крускала и $c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_n$ — это упорядоченная последовательность весов ребер из T. Пусть $S' =< V, T' >$ — произвольное остовное дерево с весами ребер $d_1 \leq d_2 \leq ... \leq d_n$. Показать, что $c_i \leq d_i$ для всех $i \in [1, n]$.
(20)

4. Построить, используя алгоритм MAXП, максимальный поток для следуюшей сети
(формат: $(v, u, c(v, u))$): $(s, v_1, 4), (s, v_2, 1), (s, v_3, 5), (v_1, v_4, 2), (v_2, v_5, 5), (v_3, v_6, 3), (v_6, v_2, 3), (v_4, t, 3), (v_5, t, 5)$, $(v_1, v_5, 2), (v_6, t, 1)$.
(15)

5. Доказать, что длины всех путей из s в t во вспомогательной сети $AN(f)$ одинаковы и равны длине кратчайшего увеличивающего пути в N с потоком f.
(20)

6. Формализуйте алгоритм построения устойчивого паросочетания и оцените его сложность.
(25)

7. Используя алгоритм Штрассена для некоторого (какого?) кольца, вычислить произведение булевых матриц $C = A * B$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(15)

8. Предположим, что существует алгоритм, вычисляющий произведение двух 4x4 матриц, используя 56 операций умножения и 420 операций сложения. Алгоритм какой сложности для умножения $n \times n$ матриц можно было бы тогда получить? Был бы он лучше алгоритма Штрассена?
(15)

8. Предложите эффективный алгоритм для построения "минимального"остовного дерева для неориентированного взвешенного графа $G = (V, E)$ с весовой функцией $c : E \to R$, если "весом"дерева $S = (V, T)$ считать вес самого тяжелого ребра S, $c(S) = \max\{c(e)|e \in T\}$. (20)

Вариант 9

1. Найти сильно связные компоненты ориентированного графа $G = (V, E)$:
$V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$; $E = \{(a, d), (d, b), (b.a), (h, f), (f, g), (d, c), (c, f), (e, c), (g, e), (e, a)\}$
(10)

2. Рассмотреть алгоритм поиска в ширину для ориентированных графов. Показать, что если в ориентированном графе G существует путь из некоторой вершины r в любую другую вершину, то алгоритм ПОШ(r) строит подграф $S =< V, T >$, который содержит в точности один путь из r к каждой другой вершине, причем это кратчайший путь.
(20)

3. Найти максимальное паросочетание в двудольном графе G, используя сведение к задаче о максимальном потоке для простой сети. $G =< \{v1, v2, v3, v4, v5\}, \{u1, u2, u3, u4, u5\}$, $E = \{(v1, u1), (v1, u3), (v2, u2), (v2, u4), (v3, u1), (v4, u1), (v4, u3), (v5, u2)\} >$.
(15)

4. Доказать, что алгоритм ПОВС можно реализовать за время $O(|V| + |E|)$ (указание: использовать для представления ac и af не массивы, а списки, связанные с дугами сети).
(20)

5. Пусть обобщенная сеть - это сеть, для каждой дуги (u, v) которой указана как верхняя $c(u, v)$, так и нижняя $b(u, v)$ граница величины потока. Показать, что задачу о максимальном потоке в обобщенной сети можно свести к задаче о максимальном потоке в "обычной"сети. (Рассмотрите случай, когда для каждой v сумма $b(u, v)$ по входяшим в v дугам равна сумме $b(v, w)$ по выходящим из v дугам).
(20)

6. Используя алгоритм 4Р, вычислить произведение булевых матриц $C = A * B$:
$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
(15)

7. Предположим, что мы умеем перемножать две (6 x 6) матрицы, используя k умножений. Какова тогда сложность умножения матриц размера $(n \times n)$ (как при использовании метода Штрассена)? При каком k это позволило бы улучшить оценку Штрассена?
(15)

8. В док-ве теоремы о связи задач умножения матриц и транзитивного замыкания графов матрица инцидентности графа с $n = 2 * k$ вершинами X разбивалась на 4 подматрицы:

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

Пусть матрица транзитивного замыкания

$$T(X) = \begin{pmatrix} F & E \\ G & H \end{pmatrix}$$

Покажите, что $G = T(D) \times C \times F$, где $T(D)$ — транзитивное замыкание матрицы D.
(20)

Вариант 10

1. Используя алгоритм ДВУСВЯЗ, найти двусвязные компоненты графа $G = (V, E)$:
$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$,
$E = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (5, 7), (6, 7), (7, 8), (6, 8), (6, 9), (6, 10), (10, 9)\}$.
(10)

2. Пусть $G = (V, E)$ — взвешенный ориентированный граф. Предложите алгоритм, который за время $O(|V| * |E|)$ находит для каждой вершины $v \in V$ величину $d(v) = \min\{r(u, v)|u \in V\}$, где $r(u, v)$ – это кратчайшее расстояние от u до v.
(20)

3. Используя алгоритм Форда-Фалкерсона, построить максимальный поток для сети N : $\{(s, v1, 5), (s, v2, 3), (s, v3, 7), (v1, v2, 1), (v2, v1, 2), (v1, t, 7), (v3, v2, 4), (v2, t, 4), (v3, t, 2)\}$.
(15)

4. Найти устойчивое паросочетание для множества "женихов"$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ и "невест" $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$, предпочтения которых заданы следующими матрицами:

$$\sigma(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma(Y) = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

(20)

5. Пусть в сети $N = (V, E, s, t)$ заданы пропускные способности дуг $c(e), e \in E$ и вершин $d(v), v \in V$. Поток через вершину v не должен превышать $d(v)$. Покажите, как задачу о максимальном потоке в такой "обобщенной"сети можно свести к задаче о максимальном потоке в "обычной"сети.
(20)

6. Используйте предыдущую задачу для решения следующей *задачи о выходе.*
Имеется граф $G = (V, E)$, вершины которого расположены в вершинах прямоугольной плоской решетки $V = \{(i, j) \ |i = 1, \ldots, n, \ j = 1, \ldots, n, \ \}$. Ребра графа — это отрезки, соединяющие соседние вершины, в частности, у каждой "внутренней"вершины (i, j) имеется 4 соседа $(i - 1, j), (i, j + 1), (i + 1, j), (i, j - 1)$, у 4-х "угловых"вершин — по 2, а у вершин на "границах "графа — по 3. Скажем, что подмножество из m вершин $U \subseteq V$ *имеет выход* , если существует m непересекающихся путей, соединяющих вершины U с граничными вершинами графа G. Предложите алгоритм, который по $G = (V, E)$ и подмножеству $U \subseteq V$ определяет имеет ли U выход. Оцените его сложность.
(20)

7. Предположим, что существует алгоритм, вычисляющий произведение двух 8x8 матриц, используя 500 операций умножения и 3120 операций сложения. Алгоритм какой сложности для умножения $n \times n$ матриц можно было бы тогда получить? Был бы он лучше алгоритма Штрассена?
(15)

6. Сколько раз может меняться для одной вершины v значение $D[v]$ в ходе работы алгоритма Дейкстры для графа с n вершинами. Привести пример на каждый возможный случай.
(20)

Вариант 11

1. Используя алгоритм Уоршолла постройте транзитивное замыкание графа, заданного следующей матрицей: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
(10)

2. Пусть $G = (V, E)$ — взвешенный ориентированный граф, $c(e) \in [-\infty, +\infty]$. Предложите алгоритм, который за время $O(|V| * |E|)$ находит для каждой вершины $v \in V$ величину $d(v) = \min\{r(u,v)|u \in V\}$, где $r(u,v)$ – это кратчайшее расстояние от u до v.
(20)

3. Построить вспомогательную сеть и тупиковый поток в ней для следующей сети (формат: $(v, u, c(v,u), f(v,u))$) : $(s, v1, 7, 6), (s, v4, 3, 2), (s, v6, 3, 2), (v1, v2, 7, 6), (v2, v3, 8, 4)$, $(v2, v4, 2, 1)$, $(v2, v6, 3, 1)$ $(v2, v5, 4, 3), (v3, v5, 3, 1), (v3, t, 4, 3), (v5, t, 6, 5)$, $(v5, v7, 1, 1), (v7, t, 2, 1)$.
(15)

4. Предложить алгоритм для поиска вершины с минимальным потенциалом в алгоритме МАХП (стр. 12) и оценить его сложность.
(15)

5. По договору с рестораном поставщик должен обеспечивать поставку d_i сафеток в i-ый день в течение n дней. Салфетки можно покупать по цене a рублей за штуку или отдавать в стирку старые салфетки. Обычная стирка одной салфетки стоит b руб. и требует двух дней, экспресс-стирка одной салфетки обходится в c руб. и они готовы через один день. Определить оптимальную политику поставщика по закупке и стирке салфеток (т.е. политику, минимизирующую его затраты). Оценить сложность получившегося алгоритма.
(25)

6. Найти НВП-разложение матрицы А:
$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
(20)

7. Предположим, что мы умеем перемножать две (8 x 8) матрицы, используя k умножений. Какова тогда сложность умножения матриц размера $(n \times n)$ (как при использовании метода Штрассена)? При каком k это позволило бы улучшить оценку Штрассена?
(15)

8. В док-ве теоремы о связи задач умножения матриц и транзитивного замыкания графов матрица инцидентности графа с $n = 2 * k$ вершинами X разбивалась на 4 подматрицы:

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

Пусть матрица транзитивного замыкания

$$T(X) = \begin{pmatrix} F & E \\ G & H \end{pmatrix}$$

Покажите, что $H = T(D) + T(D)F \times C \times F \times B \times T(D)$, где $T(D)$ — транзитивное замыкание матрицы D.
(20)

Вариант 12

1. Найти сильно связные компоненты ориентированного графа $G = (V, E)$:
$V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$;
$E = \{(a, b), (d, a), (g, h), (h, f), (c, f), (b, d), (b, c), (e, c), (c, e), (c, f)\}$.
(10)

2. Пусть матрица $R[1..n, 1..n]$ задает относительные курсы n валют: $R[i, j]$ - сумма в валюте j, на которую можно обменять 1 единицу валюты i. Постройте эффективный алгоритм, который находит путь "выгодного"обмена некоторой валюты, т.е. такой цикл $i_1, i_2, \dots, i_k, i_1$, что $R[i_1, i_2] \times \dots \times R[i_k, i_1] > 1$.
(25)

3. Построить, используя алгоритм МАХП, максимальный поток для следуюшей сети (формат: $(v, u, c(v, u))$): $(s, v_1, 4), (s, v_2, 1), (s, v_3, 5), (v_1, v_4, 3), (v_2, v_5, 5), (v_3, v_6, 3), (v_6, v_1, 3), (v_4, t, 3)$, $(v_5, t, 4)$, $(v_1, v_5, 2), (v_6, t, 1)$.
(15)

4. Доказать, что алгоритм ПОВС можно реализовать за время $O(|V| + |E|)$ (указание: использовать для представления ac и af не массивы, а списки, связанные с дугами сети).
(20)

5. Пусть $G = (V, E)$ — двудольный граф с равномощными долями, т.е. $V = X \cup Y$, $X \cap Y = \emptyset$ и $|X| = |Y|$. *Совершенным паросочетанием* в таком графе называется паросочетание, в которое входят все вершины. Для каждого подмножества вершин $U \subseteq V$ определим множество соседних вершин $N(U) = \{w | \exists u \in U[(u, w) \in E]\}$. Докажите, что в G существует совершенное паросочетание тогда и только тогда, когда для любого $A \subseteq X$ выполнено $|A| \le |N(A)|$ (теорема Холла).
(20)

6. Используя НВП-разложение решить систему линейных уравнений:
$3z + 2u = -3$
$3u = -9$
$2x - y + u = 1$
$2x + 3y = 12$.
(20)

7. Предположим, что существует алгоритм, вычисляющий произведение двух 9x9 матриц, используя 650 операций умножения и 2000 операций сложения. Алгоритм какой сложности для умножения $n \times n$ матриц можно было бы тогда получить? Был бы он лучше алгоритма Штрассена?
(15)

8. Транзитивная редукция ориентированного графа G=(V,E) — это граф G'=(V, E') с минимальным числом ребер, транзитивное замыкание которого Совпадает с транзитивным замыканием G. Постройте алгоритм нахождения транзитивной редукции ориентированного графа и оцените его сложность.
(20)

Вариант 13

1. Построить с помощью поиска в глубину остовной лес и нумерацию вершин для ориентированного графа $G = (V, E)$, где $V = \{v1, v2, v3, v4, v5, v6, v7, v8\}$
, $E = \{(v1, v2), (v1, v5), (v1, v6), (v2, v6), (v2, v3), (v8, v3), (v4, v8), (v8, v7), (v7, v4), (v4, v6)\}$.
Применить к этому же графу поиск в ширину и определить соответствующую нумерацию.
(10)

2. Пусть F - это лес, построенный алгоритмом ПОГ для ориентированного графа $G = (V, E)$. Доказать, что G - ациклический граф $\Longleftrightarrow$ $(E \setminus F)$ не содержит дуги (v, w), в которой вершина w является предком вершины v в F.
(20)

3. Докажите, что на каждом шаге алгоритма Дейкстры кратчайший путь из исходной вершины в любую вершину множества S проходит только через вершины множества S.
(20)

4. Найти максимальное паросочетание в двудольном графе, используя сведение к задаче о максимальном потоке для простой сети. $G =< \{v1, v2, v3, v4, v5\}, \{u1, u2, u3, u4, u5\}$,
$E = \{(v1, u1), (v1, u2), (v2, u2), (v2, u4), (v3, u1), (v3, u2), (v4, u5), (v4, u3), (v4, u4), (v5, u3)\} >$.
(15)

5. Доказать, что алгоритм ПОВС можно реализовать за время $O(|V| + |E|)$ (указание: использовать для представления ac и af не массивы, а списки, связанные с дугами сети).
(20)

6. Предложите алгоритм, который по сети N и максимальному потоку в ней f_m находит такое ребро, увеличение пропускной способности которого приводит к увеличению максимального потока. Оцените его сложность.
(20)

7. Найти НВП-разложение матрицы А:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(20)

8. Пусть при вычислении произведения булевых матриц можно использовать операции над двоичными векторами. Показать, что алгоритм 4Р можно с использованием таких операций выполнить за $O(n^2/\log n)$ шагов.
(20)

Вариант 14

1. Найти сильно связные компоненты ориентированного графа $G = (V, E)$:
$V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$;
$E = \{(a, d), (d, b), (b.a), (h, f), (f, g), (d, c), (c, f), (e, c), (g, e), (e, a)\}$
(10)

2. Предложите алгоритм, определяющий имеется ли в заданном неориентированном графе $G = (V, E)$ цикл за время $O(|V|)$.
(20)

3-4. Система ограничений на разности – это система неравенств вида:
$(*) \quad x_i - x_j \leq b_k \quad 1 \leq i, j \leq n,\ 1 \leq k \leq m$ (здесь x_i, x_j – переменные, b_k – константы).

Предложите алгоритм, для проверки разрешимости систем вида (*) и нахождения их решений.
Указание. Рассмотрите граф $G_* = (V_*, E_*)$, у которого $V_* = \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$,
$E_* = \{(v_0, v_i) \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{(v_, v_j) \mid\ x_i - x_j \leq b_k(*)\}$.
Пусть веса ребер : $c(v_0, v_i) = 0$ $(1 \leq i \leq n)$, $c(v_i, v_j) = b_k$, если $x_i - x_j \leq b_k(*)$.
Докажите следующее утверждения:
а) Если в графе G_* нет циклов отрицательной длины, то $x_1 = \rho(v_0, v_1), x_2 = \rho(v_0, v_2), \ldots, x_n = \rho(v_0, v_n)$ является решением системы (*).
б) Если в графе G_* есть циклы отрицательной длины, то система (*) не имеет решений.
(40)

5. Построить, используя алгоритм MAXП, тупиковый поток для следуюшей (вспомогательной) сети (формат: $(v, u, c(v, u))$) : $(s, v1, 5), (s, v2, 7), (s, v3, 3), (v1, v4, 4), (v2, v5, 5),$ $(v3, v6, 2),$ $(v2, v6, 3), (v4, t, 4), (v5, t, 4),$ $(v1, v5, 1), (v6, t, 5)$.
(15)

6. Доказать, что длины всех путей из s в t во вспомогательной сети $AN(f)$ одинаковы и равны длине кратчайшего увеличивающего пути в N с потоком f.
(20)

7. Используя алгоритм 4P, вычислить произведение булевых матриц $C = A * B$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(15)

8. Насколько быстро можно умножить $(kn \times n)$- матрицу на $(n \times kn)$- матрицу, используя алгоритм Штрассена в качестве подпрограммы? А сколько времени уйдет на их умножение в обратном порядке?
(20)

Вариант 15

1. Используя алгоритм ДВУСВЯЗ, найти двусвязные компоненты графа $G = (V, E)$:
V={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10},
E={(1,2),(2,3),(2,4),(3,4),(4,5),(5,6),(5,7),(6,7),(7,8), (6,8), (6,9), (6,10),(10,9)}.
(10)

2. Определим для ориентированного графа $G = (V, E)$ его *граф компонент* $G^K = (V^K, E^K)$ следующим образом:
$V^K = \{C \mid C - \textit{компонента сильной связности } G\}$,
$E^K = \{(C_1, C_2) \mid \ (v, u) \in E,\ v \in C_1, u \in C_2\}$.

Предложите алгоритм, который по графу G строит его граф компонент G^K за время $O(|V| + |E|)$.
(20)

3. Эйлеров цикл в неориентированном связном графе G — это путь, начинающийся и кончающийся в одной вершине, который проходит по каждому ребру ровно один раз.
G имеет Эйлеров цикл $<=>$ степени всех вершин четны.
Постройте алгоритм сложности $O(|E|)$ для нахождения Эйлерова цикла (при условии, что он существует).
(20)

4. Построить, используя алгоритм МАХП, максимальный поток для следуюшей сети (формат: $(v, u, c(v, u))$): $(s, v_1, 4), (s, v_2, 2), (s, v_3, 6), (v_1, v_4, 2), (v_2, v_5, 1), (v_3, v_6, 4), (v_6, v_2, 3), (v_4, t, 4)$, $(v_5, t, 4)$, $(v_1, v_5, 5), (v_6, t, 3)$.
(15)

5. Найти устойчивое паросочетание для множества "женихов"$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ и "невест" $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$, предпочтения которых заданы следующими матрицами:

$$\sigma(X) = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 4 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma(Y) = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

(20)

6. Назовем *запасом связности* неориентированного графа минимальное число ребер, которые необходимо удалить, чтобы сделать его несвязным. Например, для дерева это число равно 1, для простого цикла — 2. Чему оно равно для полного n-вершинного графа? Какова сложность "переборного"алгоритма для нахождения запаса связности? Постройте алгоритм вычисления запаса связности по графу, использующий сведение этой задачи к задаче нахождения максимального потока и оцените его сложность.
(20)

7. Найти НВП-разложение матрицы А:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \\ 3 & 0 & -3 & 0 \\ 4 & 4 & 20 & 0 \end{pmatrix}$$

(20)

8. Предположим, что существует алгоритм, вычисляющий произведение двух 7x7 матриц, используя 220 операций умножения и 420 операций сложения. Алгоритм какой сложности для умножения $n \times n$ матриц можно было бы тогда получить? Был бы он лучше алгоритма Штрассена?
(15)

Вариант 16

1. Найти минимальное остовное дерево для неориентированного графа $G = (V, E)$, где $V = v1, v2, v3, v4, v5, v6, v7, v8, v9$,
$E = \{(v1, v2, 5), (v1, v3, 2), (v3, v2, 4), (v3, v4, 2), (v3, v5, 4), (v4, v6, 15), (v5, v4, 9), (v6, v1, 3), (v6, v8, 8), (v6, v7, 15), (v7, v5, 10), (v7, v8, 7), (v8, v1, 7), (v8, v9, 4), (v9, v1, 6)\}$
(третий параметр в скобках - длина ребра).
(10)

2. Ребро неориентированного связного графа называется мостом, если при его удалении граф перестает быть связным.
А) Докажите, что ребро графа G является мостом тогда и только тогда, когда оно не входит ни в какой простой цикл.
Б) Постройте алгоритм нахождения всех мостов графа за время $O(|E|)$.
(20)

3. Назовем *запасом связности* неориентированного графа минимальное число ребер, которые необходимо удалить, чтобы сделать его несвязным. Например, для дерева это число равно 1, для простого цикла — 2. Чему оно равно для полного n-вершинного графа? Какова сложность "переборного"алгоритма для нахождения запаса связности? Постройте алгоритм вычисления запаса связности по графу, использующий сведение этой задачи к задаче нахождения максимального потока и оцените его сложность.
(20)

4. Найти максимальное паросочетание в двудольном графе, используя сведение к задаче о максимальном потоке для простой сети. $G =< \{v1, v2, v3, v4, v5\}, \{u1, u2, u3, u4\}$,
E={ (v1,u1),(v1,u2),(v2,u2),(v2,u4),(v3,u1),(v3,u3),(v4,u2),(v5,u3),(v4,u4)}$>$.
(15)

5. Предложите алгоритм для процедуры ПРОТЯНУТЬ и оцените его сложность.
(20)

6. Пусть есть n мужчин, n женщин и m брачных контор, каждая из которых имеет список мужчин и женщин, являющихся ее клиентами (списки разных контор могут пересекаться), между любой парой которых она может устроить брак. Для каждой конторы $i, 1 \leq i \leq m$, задано максимальное число $b(i)$ браков, которое она может устроить. Построить сеть, максимальный поток в которой соответствует нахождению максимального числа возможных браков.
(20)

7. Используя алгоритм Штрассена, перемножить две матрицы:
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$
(10)

8. Пусть P и A — две $(n \times n)$ матрицы, причем P — это матрица перестановки. Докажите, что матрица PA получается из A перестановкой строк, а AP — перестановкой столбцов. Докажите, что P обратима и $P^{-1} = P^T$ (обратная равна транспонированной).
(20)

Вариант 17

1. Определить, используя алгоритм Беллмана-Форда, для заданного ориентированного нагруженного графа $G = (V, E)$ и выделенной вершины a длины кратчайших путей из этой вершины в остальные вершины G и построить дерево этих путей либо выявить достижимый из а цикл отрицательной длины.
$V = \{a, b, c, d, e\}$, $E = \{(a, b; 10), (a, c; 20), (a, f; 40), (d, e; -25), (d, f; 1), (b, c; 12), (b, d; 25), (b, e; 10), (c, d; 10), (c, f; 14)\}$,
(здесь каждая скобка $(u, v; D)$ задает ребро $(u, v) \in E$ и его "вес"$c(u, v) = D$).
(15)

2. Модифицировать алгоритм Уоршолла-Флойда так, чтобы после его завершения можно было за время $O(|V|)$ найти кратчайший путь между любой парой вершин.. (Сложность "по порядку"не должна увеличиться).
(20)

3. Скажем, что d-мерный ящик размера $(x_1, x_2, \dots, x_d)$ *вкладывается в* ящик размера $(y_1, y_2, \dots, y_d)$, если существует такая перестановка $i_1, i_2, \dots, i_d$ измерений $1, 2, \dots, d$, для которой $x_{i_1} \le y_1, x_{i_2} \le y_2, \dots, x_{i_d} \le y_d$.

а) Докажите, что отношение *"вкладывается в"* транзитивно.

б) Предложите алгоритм проверки этого отношения.

в) Пусть дано n d-мерных ящиков. Предложите алгоритм для определения самой большой подпоследовательности вложенных ящиков (матрешки из максимально возможного числа ящиков). Оцените его сложность.
(25)

4. Построить вспомогательную сеть и тупиковый поток в ней для следующей сети (формат: $(v, u, c(v, u), f(v, u)))$: $(s, v1, 7, 4), (s, v4, 3, 1), (s, v6, 4, 2), (v1, v2, 6, 5), (v2, v3, 8, 4), (v2, v4, 1, 1), (v2, v5, 4, 3), (v3, v5, 3, 2), (v3, t, 4, 3), (v5, t, 6, 5), (v5, v7, 1, 1), (v7, t, 2, 1)$.
(15)

5. Показать, что для простой сети N с потоком f , имеющим значения 0 или 1, вспомогательная сеть $AN(f)$ является простой.
(15)

6. Доказать, что длины всех путей из s в t во вспомогательной сети $AN(f)$ одинаковы и равны длине кратчайшего увеличивающего пути в N с потоком f.
(20)

7. Используя алгоритм 4Р, вычислить произведение булевых матриц $C = A * B$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(10)

8. Насколько быстро можно умножить $(kn \times n)$- матрицу на $(n \times kn)$- матрицу, используя алгоритм Штрассена в качестве подпрограммы? А сколько времени уйдет на их умножение в обратном порядке?
(20)