Варианты контрольных работ.
(Семестр 2)

М.И. Дехтярь

1 Контрольная работа N 1

Вариант 1

1. Пусть наборы аргументов булевой функции f от трех аргументов упорядочены лексикографически, а ее значения задаются последовательностью 8 нулей и единиц. Постройте схему из функциональных элементов, реализующую эту функцию.
$f = (1110\ 1011)$
Определите сложность и глубину построенной схемы.

2. Постройте минимальную УБДР для функции
$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (x_1 \vee x_2) + (x_3 \vee x_4) + (x_5 \vee x_6)$
относительно упорядочения переменных: $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6$.

3. Постройте детерминированный конечный автомат, который распознает язык язык L в алфавите $\{0, 1\}$.
$$L = \{w \mid w \text{ \textit{содержит подслово 101 или подслово 110}}\}.$$
Докажите его правильность.

4. Постройте детерминированный конечный автомат, который распознает конкатенацию языка L из задачи 3 с языком $L' = \{w \mid w \text{ \textit{содержит нечетное число единиц} }\}$.

5. Докажите, что по каждой линейной программе P со входными переменными $X_1, \ldots, X_n$, вычисляющей в выходной переменной Z некоторую функцию $F(X_1, \ldots, X_n)$, можно эффективно построить схему из функциональных элементов S_P со входами $X_1, \ldots, X_n$, в которой имеется вершина v такая, что $f_v((X_1, \ldots, X_n) = F(X_1, \ldots, X_n)$.

Вариант 2

1. Постройте схему из функциональных элементов, определяющую результат голосования в комитете, состоящем из пяти членов: $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{5} x_i \geq 3$. Определите сложность и глубину построенной схемы.

2. Используя алгоритм СОКРАЩЕНИЕ-УБДР, построить сокращенную схему, эквивалентную следующей УБДР $D = (V, E)$:
$V = \{v_1(x_1), v_2(x_2), v_3(x_2), v_4(x_3), v_5(x_3), v_6(x_3), \mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ – здесь в скобках после вершин указаны приписанные им переменные;
$E = \{(v_1, v_2; 0), (v_1, v_3; 1), (v_2, v_4; 0), (v_2, v_6; 1), (v_3, v_5; 0), (v_3, v_6; 1), (v_4, \mathbf{0}; 0), (v_4, \mathbf{1}; 1), (v_5, \mathbf{0}; 1), (v_5, \mathbf{1}; 0), (v_6, \mathbf{0}; 0), (v_6, \mathbf{1}; 1)\}$ (третий параметр после ; — метка ребра).
Какую функцию реализует полученная схема? Постройте ее таблицу.

3. Постройте детерминированный конечный автомат, который распознает язык язык L в алфавите $\{0, 1\}$.

$$L = \{w \mid w \text{ *начинается с 0 и не содержит подслово 00* } \}.$$

Докажите его правильность.

4. Постройте детерминированный конечный автомат, который распознает пересечение языка L из задачи 3 с языком $L' = \{w \mid w$ *содержит четное число единиц* $\}$.

5. Докажите, что сложность любой схемы из функциональных элементов над базисом $\{\wedge, \vee, \neg\}$, реализующей функцию $x + y$ не меньше 4, т.е. $L(+) = 4$.

Вариант 3

1. Определите формулу, задающую функцию, которую в вершине v_7 вычисляет следующая схема $S = (V, E)$ из функциональных элементов.
$V = \{x_1, x_2, x_3, x_4, v_1(\wedge), v_2(\wedge), v_3(\vee), v_4(\neg), v_5(\vee), v_6(\wedge), v_7(\wedge)\}$ (в скобках указаны функции, приписанные вершинам),
$E = \{(x_1, v_1), (x_1, v_2), (x_2, v_1), (x_3, v_3), (x_3, v_2), (x_4, v_3), (v_1, v_4), (v_4, v_5), (v_2, v_5), (v_2, v_6), (v_3, v_6), (v_5, v_7), (v_6, v_7)\}$.
Постройте линейную программу, вычисляющую ту же функцию.

2. Постройте минимальную УБДР для функции
$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (x_1 \wedge \neg x_2) + (x_3 \wedge \neg x_4) + (x_5 \vee x_6)$
относительно упорядочения переменных: $x_4 < x_3 < x_1 < x_2 < x_5 < x_6$.

3. Постройте детерминированный конечный автомат, который распознает язык язык L в алфавите $\{0, 1\}$.

$L = \{w \mid$ *в* w *– слово, заканчивающееся на 011 и содержащее нечетное число единиц*$\}$.
Докажите его правильность.

4. Постройте детерминированный конечный автомат, который распознает разность
$L' = (L \setminus L_1)$ языка L из задачи 3 и языка L_1, включающего все слова четной длины.

5. Лифт, обслуживающий 3-х этажный магазин, имеет кнопку вызова на каждом этаже и работает по таким правилам: если нажата одна кнопка, то он движется на этаж, где ее нажали; если одновременно нажали 2 или 3 кнопки, то лифт движется на самый нижний из всех этажей, на которых нажали кнопки. Сконструируйте конечный автомат с выходом, управляющий работой лифта: его вход — список этажей, на которых нажаты кнопки, выход — направление движения и число этажей, которые должен пройти лифт.

2 Контрольная работа N 2

Вариант 1

1. Постройте регулярное выражение, задающее язык L в алфавите $\{0,1\}$.
$L = \{w \mid w$ *содержит подслово 001 или подслово 110*$\}$.

2. Пусть гомоморфизм $\phi : \{a,b,c\}^* \Rightarrow \{0,1\}^*$ определяется равенствами:
$\phi(a) = 00, \phi(b) = 11, \phi(c) = 01$.
Постройте детерминированный конечный автомат, который распознает язык $\phi^{-1}(L)$ для языка L из задачи 1.

3. Является ли регулярным следующий язык L в алфавите $\Sigma = \{a,b,c\}$?

$$L = \{a^n c b^m \mid m > 3n\}.$$

Ответ обоснуйте.

4. Построить структурированную программу, вычисляющую в z функцию:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y, & \text{если } 2 + x \geq y \\ [\ (\text{x+y})\ /\ 2\ ]\ , & \text{в противном случае} \end{cases}$$

и доказать корректность построенной программы.

5. *Цилиндрификация* — это операция, которая обратна проекции. Для любых алфавитов Δ и Σ таких, что $\Delta \subset \Sigma$, и любого языка L в алфавите Δ определим его цилиндрификацию как язык $CYL_\Sigma(L) = \{w \in \Sigma^* \mid$ *при вычеркивании из* w *всех букв, не входящих в* Δ, *получается слово* $u \in L\}$.

Показать, что для автоматного языка L язык $CYL_\Sigma(L)$ также является автоматным языком. Предложите процедуру перестройки автомата, распознающего L, в автомат, распознающий $CYL_\Sigma(L)$.

Вариант 2

1. Постройте ДКА, эквивалентный заданному НКА $M =< \{a, b, c\}, \{0, 1, 2\}, 0, \{2\}, \Phi >$ с программой $\Phi:\ 0a \to 1,\ 0a \to 2,\ 1b \to 2,\ 1c \to 1,\ 1 \to 2,\ 2b \to 0,\ 2c \to 1, 2 \to 0$.

2. Пусть гомоморфизм $\phi : \{a, b, c\}^* \Rightarrow \{0, 1\}^*$ определяется равенствами:
$\phi(a) = \varepsilon, \phi(b) = 1, \phi(c) = 01$.

Постройте детерминированный конечный автомат, который распознает язык $\phi(L)$ для языка L, распознаваемого автоматом из задачи 1.

3. Является ли регулярным следующий язык L в алфавите $\Sigma = \{a, b, c\}$?

$$L = \{a^n c b^m \mid m < 2n + 1\}.$$

Ответ обоснуйте.

4. Построить структурированную программу, вычисляющую в z функцию:

$$f(x, y) = \begin{cases} (x + 1)!, & \text{если } \log_2(x + 1) > y \\ x + y, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

и доказать корректность построенной программы.

5. Пусть L — конечно автоматный язык в алфавите Σ. Доказать, что конечно автоматным является и язык

$MAX(L) = \{w \mid w \in L$ *и для всякого непустого* x *слово* $wx \notin L\}$.

Вариант 3

1. Постройте ДКА, эквивалентный заданному НКА $M =< \{a, b\}, \{0, 1, 2, 3\}, 0, \{2, 3\}, \Phi >$ с программой $\Phi:\ 0a \to 1,\ 0a \to 2,\ 0 \to 1, 1b \to 1, 1 \to 2, 2a \to 3, 3b \to 1, 3 \to 2$.

2. Постройте детерминированный конечный автомат, который распознает прообраз $\psi^{-1}(L)$ языка L из задачи 1 при гомоморфизме $\psi : \{0, 1\}^* \to \{a, b\}^*$, заданном

равенствами:
$\psi(0) = aa, \psi(b) = ba$.

3. Является ли регулярным следующий язык L в алфавите $\Sigma = \{a, b, c\}$?

$$L = \{ab^{n!}c \mid n > 0\}$$

Ответ обоснуйте.

4. Построить структурированную программу, вычисляющую в z функцию:

$$f(x,y) = \begin{cases} x + [y/4], & \text{если } \log_3 x \leq y + 1 \\ x^y, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

и доказать корректность построенной программы.

5. Пусть структурированная программа П вычисляет в переменной y некоторую всюду определенную монотонную функцию $f(x)$, которая в 0 равна 0 ($f(0) = 0$).

Постройте структурированную программу, которая вычисляет обратную функцию $f^{-1}(x) = \{z \mid f(z) \leq x < f(z+1)\}$.

3 Контрольная работа N 3

Вариант 1

1. Доказать, что следующая функция является примитивно рекурсивной:

$$f(x,y) = \begin{cases} |2\log_2 x - y|, & \text{если } x + 1 \leq 2y \\ (x+1)^y, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

2. Построить машину Тьюринга, вычисляющую функцию:

$$f(x,y) = \begin{cases} x \,\mathbf{mod}\, (y+1), & \text{если } x > y + 1 \\ y^x, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

и обосновать правильность построения (исходные данные и результаты в унарном кодировании).

3. Доказать алгоритмическую неразрешимость следующей проблемы:
по произвольной паре структурированных программ П и П$'$ проверить, что существует такое x, что $\Phi_{\Pi,y}(x) = \Phi_{\Pi',y}(x)$.

Вариант 2

1. Доказать, что следующая функция является примитивно рекурсивной:

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \min(x^2, z^3)\ , & \text{если } x+2 > 2y \\ \sqrt{xz}, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

2. Построить машину Тьюринга, сравнивающую два слова $x = x_1x_2\dots x_n$ и $y = y_1y_2\dots y_m$ в алфавите $\{0,1\}$ лексикографически: слово x лексикографически меньше слова y ($x \prec y$) $\Leftrightarrow$ $\exists i \le n[(x_1 = y_1)\ \&\ (x_2 = y_2)\ \&\dots\ (x_{i-1} = y_{i-1})\ \&\ (x_i < y_i)]$ или для некоторого непустого слова x' выполнено $y = xx'$. Эта машина Тьюринга начинает работу на ленте вида $x * y$ и должна вычислять функцию:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \prec y \\ 1, & \text{если } x = y \\ 2, & \text{если } y \prec x \end{cases}$$

Обосновать правильность построения.

3. Доказать алгоритмическую неразрешимость следующей проблемы:
по произвольной структурированной программе П определить является ли вычисляемая ею функция $\Phi_{\Pi,y}(x)$ монотонной, т.е. выполнено ли для всех x неравенство $\Phi_{\Pi,y}(x) < \Phi_{\Pi,y}(x+1)$.

Вариант 3

1. Доказать, что следующая функция является примитивно рекурсивной:

$$f(x,y,z) = \begin{cases} 2^{\min(x,z)}\ , & \text{если } x+2 > 2y \\ \log_2(x+z+1), & \text{в противном случае} \end{cases}$$

2. Пусть язык $L = \{w \in \{a,b,c\}^* |$ (число букв a в слове $w) =$ (число букв b в слове $w) \le$ (число букв c в слове $w)\}$.
Построить машину Тьюринга, вычисляющую характеристическую функцию языка L:

$$c_L(w) = \begin{cases} 1, & \text{если } w \in L \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

3. Доказать алгоритмическую неразрешимость следующей проблемы:
по произвольной структурированной программе П определить является ли множество значений вычисляемой ею функции $\Phi_{\Pi,y}(x)$ бесконечным.