Варианты контрольных работ. (Семестр 1)

М.И. Дехтярь

1 Контрольная работа N 1

Вариант 1

1. Программист Петр использовал в своей программе три целочисленные переменные x, y и z. В определенном месте программы он поместил условный оператор:
IF $(x * y \leq 0)$ OR $(z \geq 0)$ THEN $x = 1$ ELSE $x = 2$;

Проанализировав свою программу Петр установил, что перед выполнением этого оператора выполнены следующие условия:
а) если $x \geq 0$, то $z < 0$ или $y < 0$;
б) $x \geq 0$ или $z \geq 0$;
в) если $z < 0$, то хотя бы одна из переменных y, x неотрицательна, но не обе вместе.

Опишите знания Петра в виде булевой формулы. Может ли он оптимизировать программу, заменив указанный условный оператор на присвоение $x = 1$ или на присвоение $x = 2$? Если "да", то на какое?

2. Наборы значений булевой функции от трех аргументов упорядочены лексикографически. Ее значения задаются следующей последовательностью 8 нулей и единиц:
$f = (0001\ 0111)$.
Найти задающие эту функцию сокращенную ДНФ, полином Жегалкина (методом неопределенных коэффициентов).

3. Используя основные эквивалентности, найти эквивалентные сокращенные ДНФ и доказать эквивалентность следующих формул:
$\Phi = (\neg(X \to (\neg Y \to (X \wedge \neg Z))) \wedge (Z \vee \neg(X \wedge Y)))$, $\quad \Psi = ((X \wedge Z) + (X \wedge Y \wedge Z))$.

4. Используя теорему Поста, выяснить, полна ли следующая система функций:
$$\{(10010110), (01111100), (00010011)\}.$$

5. Длиной многочлена Жегалкина называется число его слагаемых (элементарных конъюнкций). Например, $p(X_1, X_2) = 1 + X_1 + X_1 * X_2$ имеет длину 3. Сколько существует различных многочленов Жегалкина от n переменных длины k, которые обращаются в 0 на наборах $(0, 0, \ldots, 0)$ и $(1, 1, \ldots, 1)$, состоящих из одних нулей и единиц, соответственно? Привести доказательство.

Вариант 2

1. Детектив Ш. Холмс подозревает в совершении преступления трех лиц: A, B и C. Они дали следующие показания:
A : если B преступник, то C не виновен ;
B : если A виновен, то и C является преступником;
C : A преступник.
Ш. Холмс установил, что если A сказал правду, то B соврал, и что показаниям C нельзя доверять. Опишите знания Ш. Холмса в виде булевой формулы и постройте таблицу ее значений. Может ли он сделать вывод, что B является преступником? Мог ли преступник быть один?

2. Наборы значений булевой функции от трех аргументов упорядочены лексикографически. Ее значения задаются следующей последовательностью 8 нулей и единиц:
$f = (0100\ 1111)$.
Найти задающие эту функцию совершенную КНФ, сокращенную ДНФ и полином Жегалкина (методом неопределенных коэффициентов).

3. Используя основные эквивалентности, найти эквивалентные сокращенные ДНФ и доказать эквивалентность следующих формул:
$\Phi = (((X \vee Y) \to \neg Z) \wedge ((X \wedge Z) \to Y)), \quad \Psi = (Z \to ((X + 1) \wedge \neg Y))$.

4. Используя теорему Поста, выяснить, полна ли следующая система функций:
$$\{(01111100), (11001100), (01010111)\}.$$

5. Доказать, что каждую функцию, представимую формулой, включающей лишь переменные и операцию импликации $\to$, можно представить (с точностью до обозначения переменных) в виде $X_i \vee f(X_1, \ldots, X_n)$, где $f(X_1, \ldots, X_n)$ – некоторая булева функция.

Вариант 3

1. Трое экспертов исследовали экономическое положение трех предприятий A, B и C, связанных деловыми отношениями. Они пришли к следующим заключениям:
1-ый эксперт: если A обанкротится, то из остальных B и C хоть одно предприятие не обанкротится;
2-ой эксперт: если C не обанкротится, то обанкротится одно из предприятий A, B но не оба вместе;
3-ий эксперт: обанкротятся не менее двух предприятий.
Опишите заключения экспертов в виде булевых формул и постройте таблицу значений их конъюнкции. Можно ли сделать вывод, что C обанкротится? Можно ли однозначно определить второго банкрота?

2. Наборы значений булевой функции от трех аргументов упорядочены лексикографически. Ее значения задаются следующей последовательностью 8 нулей и единиц:
$f = (1100\ 1010)$.
Найти задающие эту функцию сокращенную ДНФ и полином Жегалкина (методом неопределенных коэффициентов).

3. Используя основные эквивалентности, найти эквивалентные многочлены Жегалкина и доказать эквивалентность следующих формул:
$\Phi = (((Y \wedge Z) \to \neg(X \vee Z)) \wedge \neg(\neg Y \wedge Z \wedge X)), \quad \Psi = (Z \to (\neg Y \wedge \neg X))$.

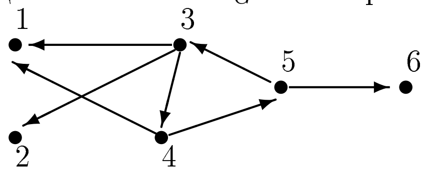
4. Используя теорему Поста, выяснить, полна ли следующая система функций:
$$\{(00010111), (10010110), (00110111)\}.$$

5. Функция $f(X_1, \ldots, X_n)$ называется *симметрической*, если $f(X_1, \ldots, X_n) = f(X_{i_1}, \ldots, X_{i_n})$ для любой перестановки $(i_1, \ldots, i_n)$ чисел $(1, \ldots, n)$.
1) Показать, что, если f – симметрическая функция, то для любых двух наборов $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ с одинаковым числом единиц имеет место равенство $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = f(\beta_1, \ldots, \beta_n)$.
2) Найти число симметрических функций от n переменных.

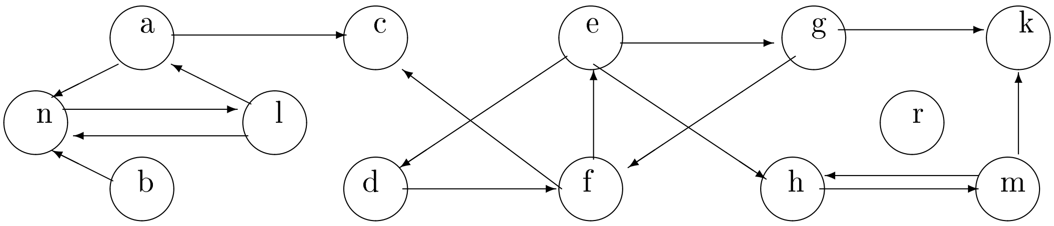
2 Контрольная работа N 2

Вариант 1

1. Построить для заданного ориентированного графа $G = (V, E)$ его матрицу смежности A_G, матрицу инцидентности B_G и списки смежности. Вычислить матрицу достижимости A_{G^*} и построить соответствующий граф достижимости G^*.



2. Определить для заданного ориентированного графа G его компоненты сильной связности, порядок (отношение достижимости) на них и все базы графа.



3. Построить для заданного нагруженного неориентированного графа $G = (V, E)$ минимальное остовное дерево.
$V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $E = \{(a, b; 12), (a, c; 9), (a, f; 25), (a, g; 7), (b, d; 17), (b, f; 27), (b, g; 10),$ $(c, d; 15),$ $(c, g; 3), (d, e; 5), (d, f; 20), (e, f; 25)\}$,
(здесь каждая скобка $(u, v; d)$ задает ребро $(u, v) \in E$ и его "вес" $c(u, v) = d$).

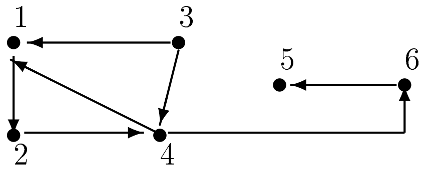
4. Определить для заданного нагруженного графа $G = (V = \{a, b, c, d, e, f\}, E)$ и выделенной вершины $a \in V$ длины кратчайших путей из этой вершины в остальные вершины G и построить дерево этих путей.

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ 0 & 25 & 5 & 26 & 53 & 75 \\ 12 & 0 & \infty & \infty & 120 & 40 \\ \infty & 15 & 0 & 20 & 47 & 60 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 30 & 45 \\ \infty & \infty & 75 & 20 & 0 & 20 \\ 40 & 15 & 15 & 26 & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

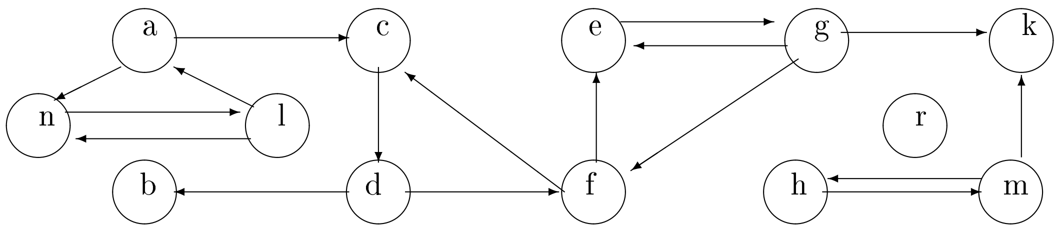
5. Докажите, что неориентированный граф $G = (V, E)$ является связным тогда и только тогда, когда для каждого разбиения множества его вершин V на два непустых подмножества V_1 V_2 ($V = V_1 \cup V_2, V_1 \cap V_2 = \emptyset$) существует ребро, соединяющее V_1 с V_2.

Вариант 2

1. Построить для заданного ориентированного графа $G = (V, E)$ его матрицу смежности A_G, матрицу инцидентности B_G и списки смежности. Вычислить матрицу достижимости A_{G^*} и построить соответствующий граф достижимости G^*.



2. Определить для заданного ориентированного графа G его компоненты сильной связности, порядок (отношение достижимости) на них и все базы графа.



3. Обойти (занумеровать) вершины заданного неориентированного графа G с помощью алгоритма обхода "в глубину"и построить дерево этого обхода.
$G = (V, E)$, где $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}\}$, $E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_4), (v_4, v_8), (v_2, v_9), (v_2, v_{11}), (v_3, v_4), (v_6, v_3), (v_3, v_7), (v_6, v_7), (v_{10}, v_9)\}$.

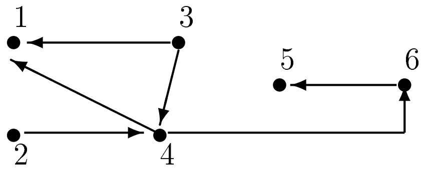
Какое обратное ребро $e \in E \backslash T$ и цикл в G обнаружились в этом обходе первыми?

4. Определить для заданного нагруженного графа $G = (V, E)$ и выделенной вершины $3 \in V$ длины кратчайших путей из этой вершины в остальные вершины G и построить дерево этих путей.
$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $E = \{(1, 5; 25), (2, 7; 3), (3, 2; 25), (3, 4; 18), (3, 6; 5), (4, 2; 7), (4, 5; 4), (6, 1; 10), (6, 4; 10), (6, 7; 25), (3, 7; 15)\ (8, 5; 7), (8, 7; 4)\}$
(здесь каждая скобка $(u, v; D)$ задает ребро $(u, v) \in E$ и его "длину" $c(u, v) = D$).

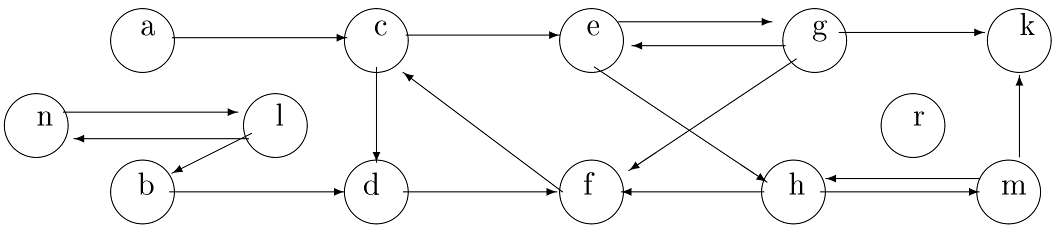
5. Пусть e – ребро максимального веса в некотором цикле графа $G = (V, E)$. Докажите, что существует минимальный остов графа $G' = (V, E \setminus \{e\})$, который является также минимальным остовом графа G.

Вариант 3

1. Построить для заданного ориентированного графа $G = (V, E)$ его матрицу смежности A_G, матрицу инцидентности B_G и списки смежности. Вычислить матрицу достижимости A_{G^*} и построить соответствующий граф достижимости G^*.



2. Определить для заданного ориентированного графа G его компоненты сильной связности, порядок (отношение достижимости) на них и все базы графа.



3. Построить дерево представляющее формулу:
$\Phi = ((x + y) * (z - (x * z)))/((5 + (x * (v/u)) - (v * (7 + n)))$.
Выписать вершины этого дерева в прямом и в обратном порядках.

4. Определить для заданного нагруженного графа $G = (V, E)$ и выделенной вершины $B \in V$ длины кратчайших путей из этой вершины в остальные вершины G и построить дерево этих путей.

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ 0 & \infty & 20 & 3 & \infty & \infty \\ 7 & 0 & 30 & 8 & 120 & \infty \\ 223 & 9 & 0 & \infty & \infty & 50 \\ 10 & 5 & \infty & 0 & 2 & 60 \\ \infty & 20 & 10 & 12 & 0 & 40 \\ 10 & \infty & 100 & 2 & 60 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Пусть $D = (V, T)$ – это остовное дерево, построенное алгоритмом обхода "в глубину"для графа G=(V, E). Докажите, что для каждого ребра (u, v) из E, не попавшего в T (такие ребра называются *обратными*), либо u является предком v в D, либо v является предком u в D.